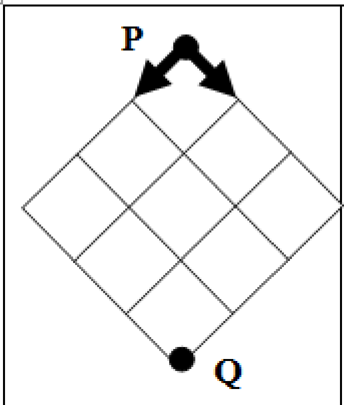
S10C. Autour des problèmes de DENOMBREMENT Corrigé

Mise en route

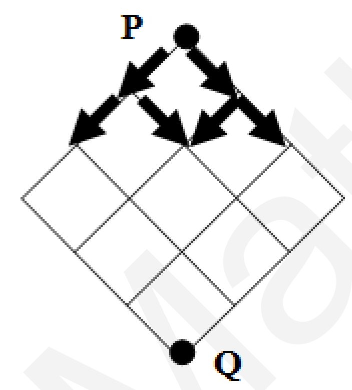
A. Si Paul tire deux chaussettes, elles peuvent être de couleurs différentes. De même s'il tire trois chaussettes il aura dans le cas le plus défavorable R, B, J. Par contre en tirant une quatrième chaussette, elle sera obligatoirement R, B, ou J, et il aura au moins une paire de même couleur.

Le nombre minimal de chaussettes à prendre pour être sûr de disposer d'une paire est donc 4.

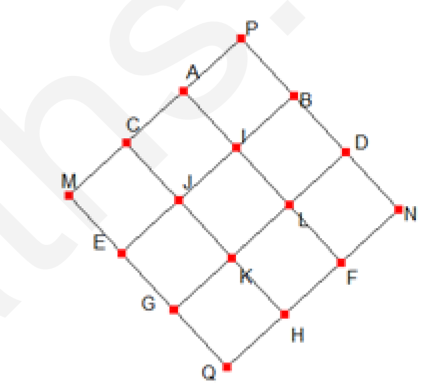
B[1]**.** On part de P (premier niveau), et on note « niveau par niveau », le nombre de chemins possibles pour arriver à un nœud du niveau inférieur.



Du premier niveau au second niveau



Du second niveau au troisième niveau



On peut voir que pour passer de P au second niveau on a deux possibilités

Pour passer au troisième niveau 2×2 soit 4 possibilités

Pour passer au quatrième niveau, $2 \times 2 \times 2$ soit 8 possibilités

Pour atteindre le cinquième niveau 6 nouveaux chemins possibles, soit en tout 14 possibilités

Pour atteindre le sixième niveau 4 nouveaux chemins possibles, soit en tout 18 possibilités

Pour atteindre le point Q, au dernier niveau, 2 nouveaux chemins possibles, soit 20 possibilités en tout.

Si vous avez besoin de visualiser les chemins, voici leur liste longue à établir mais encore accessible, mais il serait difficile de raisonner ainsi sur un nombre supérieur de cases !

- PA ou PB
- PAC ou PAI, PBI ou PBD
- PACM ou PACJ, PAIJ ou PAIL, PBIJ ou PBIL, PBDL ou PBDN

[1] Schémas 1 et 2 Copirelem

- PACME, PACJE ou PACJK, PAIJE ou PAIJK, PAILK ou PAILF, PBIJE ou PBIJK, PBILK ou PBILF, PBDLK ou PBDLF, PBDNF
- PACMEGQ, PACJEGQ, PACJKGQ ou PACJKHQ, PAIJEGQ, PAIJKGQ, PAIJKHQ, PAILKGQ ou PAILKHQ, PAILFHQ, soit dix trajets passant par A et autant passant par B : PBIJEGQ, PBIJKGQ ou PBIJKHQ, PBILKGQ ou PBILKHQ, PBILFHQ, PBDLKGQ ou PBDLKHQ, PBDLFHQ, PBDNFHQ.

Avec un quadrillage à 4 cases il y aurait $2\times2\times2\times2=16$ *possibilités pour atteindre le « cinquième niveau », le point P étant au premier niveau,* $16+8+6+4+2=36$ *chemins pour arriver à Q.*

C. 1. La première personne sert la main de 9 personnes. La suivante sert la main de neuf personnes moins celle de la première car la poignée de main a déjà eu lieu donc 8 nouvelles poignées de main (représentation chronologique). La troisième sert la main de 7 personnes, la quatrième…. la dixième ne sert aucune poignée de main car elle les a déjà toutes serrées. Au total : $9+8+7+6+5+4+3+2+1+0=45$ poignées de main.

2. Dans le cas où il y a 20 personnes.

Première procédure : généralisation de la procédure utilisée pour 10 personnes : $19+18+.......+2+1$

On peut remarquer que si on l'ajoute chaque terme de la somme $19+18+.......+2+1$, à chaque terme de la somme $1+2+......+18+19$, on obtient $(19+1)+(18+2)+(17+3)+\ ....+\ (2+18)+(1+19)$ *soit* 19×20

La somme vaut donc $\dfrac{20\times19}{2}=190$

Seconde procédure : on considère deux groupes A et B de 10 personnes, puis chaque personne du groupe A sert les dix mains des personnes du groupe B soit $45\times2+10\times10=190$ poignées de main

3. Dans le cas où il s'agit de 5 couples : pour chaque personne, il y a 8 personnes à qui serrer la main (les dix personnes, moins le conjoint et elle-même). La première sert donc 8 mains. Choisissons pour la seconde personne, son conjoint : il sert aussi 8 mains.

La troisième a déjà serré les mains de deux personnes, doit serrer les mains d'encore 7 personnes parmi lesquelles son conjoint, donc 6 personnes. Le conjoint, de même, a déjà serré les mains de 2 personnes, il y a donc encore 7 personnes parmi lesquelles sont conjoint : donc il reste 6 poignées de mains.

La cinquième personne doit serrer les mains de 4 personnes, idem pour son conjoint. La septième personne serre les mains de 2 personnes, idem pour son conjoint et les 2 dernières personnes ont déjà serré toutes les mains. Au total $2\times8+2\times6+2\times4+2\times2=16+12+8+4=40$ poignées de mains.

Autre méthode : utiliser le résultat du début. Si chaque personne sert la main de tout le monde, il a donné une poignée de main en trop. Mais il ne faut enlever cette poignée de mains en trop qu'une seule fois pour les deux conjoints, donc il y a eu 5 poignées de mains en trop : 45-5 = 40

Pour s'exercer[2]

Exercice 1

Si on tire 5 bouteilles elles peuvent être toutes différentes (cas le plus défavorable)

Si on tire à nouveau 5 bouteilles, elles peuvent encore être toutes différentes (cas le plus défavorable : au bout de 10 tirages, il y a deux bouteilles de chaque sorte).

C'est donc à la onzième bouteille qu'on est certain d'avoir trois bouteilles identiques.

Exercice 2

Le plus petit multiple de 21 avec une écriture à trois chiffres est 105, le plus grand est obligatoirement inférieur à 999. Le problème revient à chercher combien il existe de pas de longueur 21 entre ces deux nombres. On peut écrire $999 - 105 = 894 = \mathbf{42} \times 21 + 12$. Il y a donc 42 autres multiples de 21, soit au total 43 multiples de 21 avec une écriture à trois chiffres, et il faudra $43 \times 3 = 129$ caractères pour les écrire.

Le plus grand entier à cinq chiffres est 99999, celui à quatre chiffres 9999. Entre 1 et 99999, il y a 4761 multiples de 21 ; en effet $99999 = 21 \times 4761 + 10$. Entre 1 et 9999, il y a 476 multiples de 21 ; en effet, $9999 = 476 \times 21 + 3$. On peut donc conclure qu'entre 9999 et 99999, il y a $4761 - 476 = 4285$ multiples de 21 qui s'écriront nécessairement avec cinq chiffres (puisque supérieurs à 9999). Il faudra donc $4285 \times 5 = 21425$ caractères pour les écrire.

Exercice 3

Si Pierre est le père de six d'entre eux et Marie la mère de cinq d'entre eux, il y aurait 11 onze enfants si aucun n'était issu de leur mariage commun. Compte tenu du fait qu'il y a huit enfants dans leur maison, ils ont donc eu ensemble trois enfants. Marie avait auparavant deux enfants, et Pierre avait trois enfants.

Exercice 4

$24 + 15 = 39$. Il y a donc 39 personnes qui pratiquent soit le tennis, soit le canoë, soit les deux. Or 6 personnes pratiquent les deux. Il reste donc 33 personnes pratiquant soit le tennis, soit le canoë, et il reste 87 personnes ne pratiquant aucun sport. ($120 - 33 = 87$)

Exercice 5

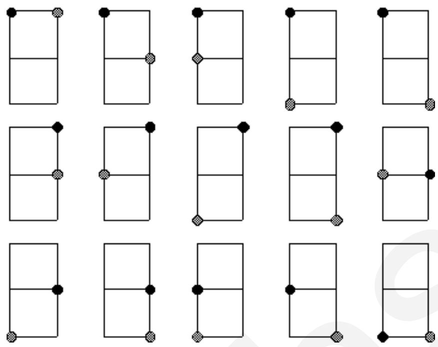
Pour la première molette, il y a 10 possibilités. Pour chacune de ces 10 possibilités, il y a 10 possibilités pour la 2ème molette : il y a donc 100 possibilités pour les deux premiers chiffres. Ensuite, pour chacune de ces 100 possibilités, il y a 10 possibilités pour la 3ème molette. Finalement, il y a donc $10 \times 10 \times 10 = 1000$ codes possibles.

2. 2. Limoges 96 - 4. Corse 97- 6. D'après Rallye maths Orléans 2006 - 7. Rallye Maths 2006 Orléans-Tours

Exercice 6

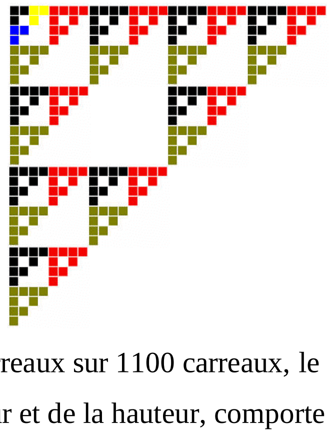
a. Un caractère d'écriture Braille destinée aux aveugles est formé de points obtenus en piquant la feuille de papier à travers au moins un des six nœuds de la grille ci-dessous : on constate qu'il y a six choix possibles pour le premier point (nœud de la grille), et à chacun de ces choix est associé cinq choix pour le second. Cependant chaque couple est répété deux fois. On obtient donc $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ caractères.

b. Il y a autant de caractères de quatre points que le nombre de caractères de deux points, car à chaque caractère de deux points est associé un caractère de quatre points.



Exercice 7 : Le triangle de Sierpinski

1. Sur une feuille quadrillée 5×5, format A4, c'est-à-dire dont la plus petite dimension fait 21cm, on peut placer un triangle de 32 carrés de côté. En effet, sut la longueur, chaque étape multiplie par 2 le nombre de carrés utilisés, soit 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 ce qui représente 32 carrés soit 16cm. Simultanément, à chaque étape, on multiplie par 3 le nombre de carrés utilisés. Le premier triangle en utilise 3, la deuxième étape 3×3, la troisième 3^3, puis 3^4, puis 3^5 soit 243 carrés.



2. Dans un quadrillage de 1100 carreaux sur 1100 carreaux, le plus grand **triangle de Sierpinski** possible, en tenant compte de la longueur et de la hauteur, comporte 2^{10} = 1024 carrés.