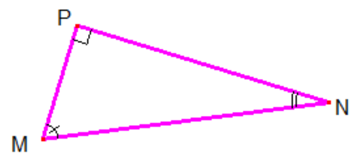
S14C. Autour de la TRIGONOMETRIE Corrigé

Mise en route

A. Le triangle MNP étant rectangle en P, on peut utiliser la trigonométrie. [MN] est l'hypoténuse du triangle, [MP] est le côté adjacent à $\widehat{M}$ et aussi le côté opposé à $\widehat{N}$. [NP] est le côté adjacent à $\widehat{N}$ et aussi le côté opposé à $\widehat{M}$.

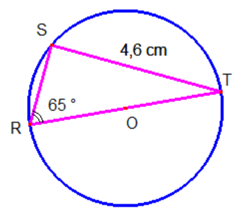


On connaît les mesures des longueurs	On cherche la mesure de l'angle	Réponse
MN et MP	$\widehat{NMP}$	Réponse 2 : $\cos\widehat{M} = \frac{MP}{MN}$
MN et NP	$\widehat{MNP}$	Réponse 2 : $\cos\widehat{N} = \frac{NP}{MN}$
MP et NP	$\widehat{MNP}$	Réponse 3 : $\tan\widehat{N} = \frac{MP}{NP}$
MN et NP	$\widehat{NMP}$	Réponse 1 : $\sin\widehat{M} = \frac{NP}{MN}$
MN et NP	$\widehat{MPN}$	Réponse 4 : l'angle $\widehat{MPN}$ est l'angle droit du triangle. Pas de relation trigonométrique. Par contre on connaît sa valeur, 90°.

B. **Prudence** : Dans les trois cas, pour pouvoir utiliser la trigonométrie, il faut en premier lieu prouver que le triangle utilisé est rectangle.

Fig.1

Les points R, S, T sont sur le cercle de centre O. Le triangle RST est inscrit dans un demi-cercle ayant pour diamètre un de ses côtés [RT], il est donc rectangle en S.

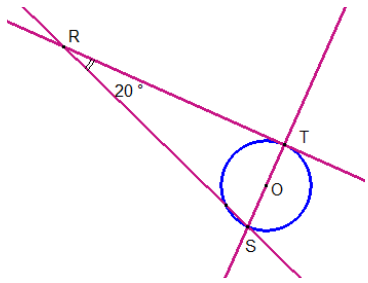


Dans ce triangle rectangle, on cherche la longueur de l'hypoténuse [RT], on connaît l'angle $\widehat{R}$ et le côté ST, opposé à l'angle $\widehat{R}$. On peut donc utiliser la trigonométrie :

$$\sin\widehat{R} = \frac{ST}{RT} \quad soit\ RT \times \sin\widehat{R} = ST \ \ et\ \ RT = \frac{ST}{\sin\widehat{R}} \qquad RT = \frac{ST}{\sin\widehat{R}} = \frac{4,6}{\sin 65°} \approx 5,1cm$$

Fig.2

La droite (RT) est tangente au cercle de centre O, elle est donc perpendiculaire au rayon [OT]. Les points T et S étant diamétralement opposés, ils sont alignés avec O ; la droite (RT) est donc perpendiculaire à [ST] et le triangle RST est rectangle en T.

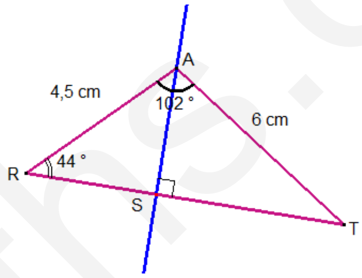


On cherche la mesure de la longueur du côté [RT], on connaît l'angle $\widehat{R}$ et la mesure de la longueur de son côté opposé [ST], égale à 4cm. On peut donc utiliser la trigonométrie :

$$\tan\widehat{R} = \frac{TS}{RT} \text{ soit } RT \times \tan\widehat{R} = TS \text{ ou } RT = \frac{TS}{\tan\widehat{R}} \qquad RT = \frac{4}{\tan 20°} \approx 11cm$$

Fig.3

Attention, le triangle ART n'est pas rectangle, on ne peut donc pas utiliser la trigonométrie directement dans ce triangle. Par contre on peut se placer dans le triangle rectangle RAS. En effet, puisque la droite (AS) est la hauteur du triangle ART, elle est perpendiculaire au côté [RT].



Dans le triangle rectangle RAS, $\cos\widehat{R} = \frac{RS}{RA}$ soit $RS = RA \times \cos\widehat{R}$ $\qquad RS = 4,5 \times \cos 44° \approx 3,2cm$

D'autre part $\widehat{RAS} = 90° - 44° = 46°$ et $\widehat{SAT} = 102° - 46° = 56°$

Dans le triangle SAT, on cherche ST, côté opposé à l'angle $\widehat{SAT}$. On peut utiliser la trigonométrie :

$$\sin 56° = \frac{ST}{AT} \text{ soit } ST = AT \times \sin 56° \qquad ST = 6 \times \sin 56° \approx 5cm$$

On en déduit que $RT = RS + ST \approx 8,2cm$

C. La calculatrice nous permet de calculer $\cos 50° \approx 0,643$ *et* $\sin 50° \approx 0,766$.

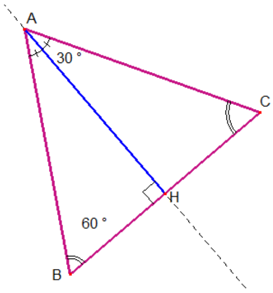
Si l'on calcule $(\cos\widehat{B})^2 + (\sin\widehat{B})^2$ à partir de ces valeurs approchées, la calculatrice affiche : $\cos^2 50° + \sin^2 50° \approx 0,643^2 + 0,766^2 \approx 1,000205$. Si l'on fait directement le calcul $(\cos 50°)^2 + (\sin 50°)^2$ sur la calculatrice, celle-ci affiche1. Est-ce la valeur exacte ?

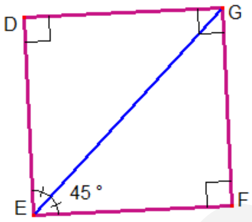
Dans le triangle rectangle ABC, d'hypoténuse [AB], d'une part $AC^2 + BC^2 = AB^2$ d'après le théorème de Pythagore, d'autre part $\cos\widehat{B} = \frac{BC}{AB}$ *et* $\sin\widehat{B} = \frac{AC}{AB}$

$$\cos^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{B} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1.$$

La relation $\cos^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{B} = 1$ est donc démontrée pour l'angle $\widehat{B}$; la démonstration précédente montre qu'elle est vraie pour tout angle aigu de mesure x : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

D. Dans le triangle équilatéral ABC de côté a, la hauteur [AH] est perpendiculaire au côté [BC]. Le triangle ABH est donc rectangle en H. La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Dans le triangle équilatéral ABC, les trois angles sont égaux, chaque angle vaut donc 60°. La hauteur [AH] est d'une part bissectrice de l'angle$\hat{A}$, cet angle est donc partagé en deux angles de 30°, d'autre part médiatrice de [BC], donc H est le milieu de [BC]. Ainsi $\widehat{ABC} = \widehat{BAC} = \widehat{ACB} = 60° \ et \ \widehat{BAH} = \widehat{CAH} = 30°$





Dans le carré DEFG, la diagonale est axe de symétrie. Elle partage l'angle droit en deux angles de 45°. Ainsi $\widehat{DEG} = \widehat{FEG} = 45°$.

Pour compléter ce tableau en valeurs exactes, on peut soit utiliser les valeurs affichées par la calculatrice, quand celle-ci le permet, soit prendre appui sur les propriétés spécifiques à ces deux figures.

La calculatrice affiche $\cos 60° = 0,5 = \frac{1}{2}$.

Sans calculatrice, on sait que $AB = a \ et \ BH = \frac{a}{2}$, d'où $\cos 60° = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$.

Pour trouver la valeur de sin60°, on peut utiliser la relation démontrée dans la question précédente.

Ainsi $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1 \ soit \ \sin^2 60° = 1 - 0,5^2 = 0,75 = \frac{3}{4} \ d'où \ \sin 60° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Par ailleurs $\tan \hat{B} = \frac{AH}{BH}$. Or $\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \ et \ \cos \hat{B} = \frac{BH}{AB}$, d'où $\frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{AH}{AB}}{\frac{BH}{AB}} = \frac{AH}{AB} \times \frac{AB}{BH} = \frac{AH}{BH} = \tan \hat{B}$

On remarque qu'on peut donc trouver la valeur exacte de $\tan \hat{B}$ en faisant le quotient de $\sin \hat{B}$ par $\cos \hat{B}$.
Cette relation est vraie pour toute angle aigu de mesure x, avec $0 \leq x < 90°$.

Ainsi $\tan 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$.

Pour compléter les valeurs pour 30°, on peut partir de la valeur donnée par la calculatrice, $\sin 30° = \frac{1}{2}$. On peut aussi constater que dans le triangle ABH, $\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} = \cos \hat{A} \ et \ \cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} = \sin \hat{A}$.

On en déduit que $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \frac{\cos \hat{B}}{\sin \hat{B}} = inverse \ de \ \tan \hat{B}$. Ainsi $\tan 30° = \frac{1}{\tan 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Dans le carré DEFG, le triangle EFG est rectangle en F et isocèle puisque chaque angle aigu mesure 45°.

La calculatrice donne une valeur approchée identique pour sin45° et cos45°.

$\sin\widehat{FEG} = \sin 45° = \dfrac{FG}{EG}$ *et* $\cos\widehat{FEG} = \cos 45° = \dfrac{EF}{EG}$. Comme *EF*=*FG*, les deux valeurs sont bien égales.

Soit *a* la longueur du côté du carré. Ainsi $EF = FG = a$. Le théorème de Pythagore permet de calculer la mesure de la diagonale en fonction du côté *a*, on trouve $EG = a\sqrt{2}$.

D'où $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{EF}{EG} = \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan 45° = \dfrac{FG}{EF} = \dfrac{a}{a} = 1$

En résumé, on retiendra ces quelques valeurs remarquables, ou tout au moins celles qui permettent de les retrouver toutes rapidement

	sin x	*cos x*	*tan x*
60°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
30°	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1

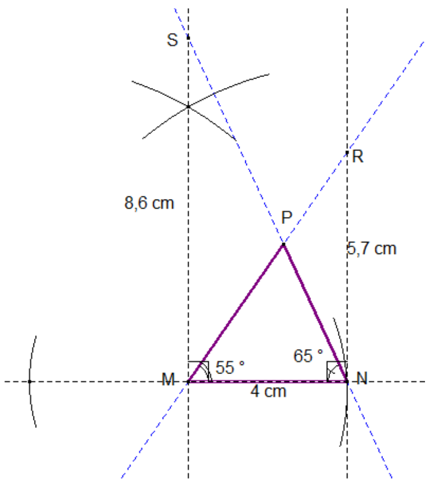
E. Construction avec uniquement une règle graduée, un compas et une calculatrice.

- Tracer un segment [MN] de longueur 4cm.
- Tracer au compas la perpendiculaire en M à [MN], et la perpendiculaire en N à [MN].
- Pour construire l'angle de 55° en M, on va chercher le point R à partir de la valeur de la tangente de l'angle $\widehat{M}$:

  $\tan 55° = \dfrac{NR}{NM}$ *d'où* $NR = NM \times \tan 55° \approx 5{,}7\,cm$

  De même, pour construire l'angle de 65° en N, on va chercher le point S à partir de la valeur de la tangente de l'angle $\widehat{N}$:

  $\tan 65° = \dfrac{MS}{MN}$ *d'où* $MS = 4 \times \tan 65° \approx 8{,}6\,cm$



Le point d'intersection de la droite (NS) et de la droite (MR) est le troisième sommet P du triangle MNP.

Pour s'exercer[1]

Exercice 1

1. L'hexagone régulier ABCDEF détermine 6 triangles isocèles isométriques. L'angle au centre de 360° est partagé en six angles égaux de mesure 60°. Les six triangles sont donc équilatéraux, et H pied de la hauteur est le milieu de la base [AB].

Dans le triangle OAB, $OB = r \ et \ HA = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{r}{2}$. Le triangle OHB étant rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore $OB^2 = OH^2 + HB^2$. On en déduit $OH^2 = OB^2 - HB^2 = r^2 - (\dfrac{r}{2})^2 = r^2 - \dfrac{r^2}{4} = \dfrac{3r^2}{4}$, soit $OH = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$. L'aire du triangle OAB est égale à $\dfrac{1}{2} OH \times AB$. On en déduit **l**'aire de l'hexagone $A_{hexagone} = 6 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{r\sqrt{3}}{2} \times r = \dfrac{6}{4} \times r^2\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} r^2$.

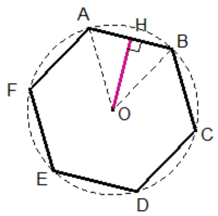


fig.1

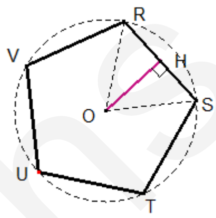


fig.2

2a. Le pentagone régulier RSTUV est formé de 5 triangles isocèles isométriques. L'angle au centre de 360° est partagé en cinq angles égaux à $\widehat{ROS}$ de mesure 72°. Le triangle ROS étant isocèle, la hauteur [OH] est aussi bissectrice et médiatrice de [RS]. D'où $\widehat{ROH} = \widehat{SOH} = 36°$ et $RS = 2 \times RH$

Dans le triangle rectangle ROH, $\cos \widehat{ROH} = \cos 36° = \dfrac{OH}{OR} = \dfrac{OH}{r} \ soit \ OH = r \times \cos 36°$

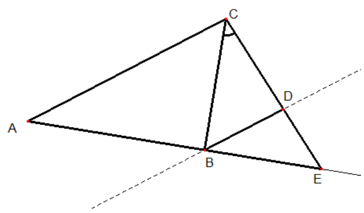
2b. D'autre part $\sin \widehat{ROH} = \sin 36° = \dfrac{RH}{OR} = \dfrac{RH}{r} \ soit \ RH = r \times \sin 36° \ ou \ encore \ RS = 2r \times \sin 36°$

L'aire du triangle ROS est égale à $A_{ROS} = \dfrac{1}{2} \times OH \times RS = \dfrac{1}{2} \times r \times \cos 36° \times 2r \times \sin 36° = r^2 \times \sin 36° \times \cos 36°$.

D'où $A_{pentagone} = 5 \times A_{ROS} = 5r^2 \times \sin 36° \times \cos 36°$

Exercice 2

$AB = 6 \ cm$; $AC = 7{,}5 \ cm$; $BC = 4{,}5 \ cm$. A, B, E sont alignés et $AE = 10 \ cm$. (BD) est parallèle à (AC).



[1] D'après 2011G2 - Asie 2000 – D'après Orléans1998

1. On demande de démontrer que le triangle ABC est rectangle en B, on peut donc utiliser la réciproque du théorème de Pythagore. $AB^2 = 6^2 = 36$ $BC^2 = 4,5^2 = 20,25$ $AC^2 = 7,5^2 = 56,25$

On a bien $AB^2 + BC^2 = AC^2$, le triangle ABC est donc rectangle en B.

2. Si le triangle ABC est rectangle en B, l'angle $\widehat{B}$ est droit et le triangle BCE est aussi rectangle.

On connaît $AE = 10$ *et* $AB = 6$ d'où $BE = 4,$ *et* $BC = 4,5$

On connaît donc le côté opposé et le coté adjacent à l'angle $\widehat{BCE}$. On peut donc utiliser la tangente de l'angle $\widehat{BCE}$: $\tan \widehat{BCE} = \frac{BE}{BC} = \frac{4}{4,5} \approx 0,889$. La calculatrice permet de trouver une valeur approchée de l'angle, $\widehat{BCE} \approx 42°$

3. Dans le triangle ACE, les points E, D, C d'une part et E, B, A d'autre part sont alignés. La droite (BD) est parallèle au côté [AC]. D'après le théorème de Thalès :

$\frac{EB}{EA} = \frac{ED}{EC} = \frac{BD}{AC}$, soit $\frac{4}{10} = \frac{BD}{7,5}$ On en déduit que $BD = \frac{4 \times 7,5}{10} = 3cm$.

Exercice 3

Sur la figure 1, ABHF est un carré de côté 8, A'EFG et CA'GH sont des trapèzes rectangles, AEC et ABC sont deux triangles rectangles. Sur la figure 2, AEQN forme un rectangle. $FE = GH = CH = A'E = 5$ et $FG = A'C = AE = BC = 3$.

1. $AN = AB + BN = AB + CH = 8 + 5 = 13$ $NQ = GH = 5$

Aire du carré $ABHF = AB \times BH = 8 \times 8 = 64$ Aire du rectangle $AEQN = AN \times NQ = 13 \times 5 = 65$

Si le puzzle est réalisable, il permet effectivement de montrer que ces deux aires sont égales et donc que $64 = 65$ …Le doute s'installe!!

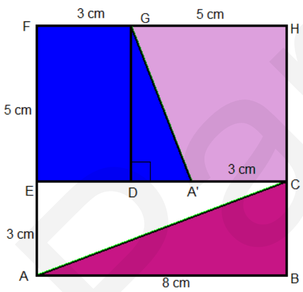


fig.1

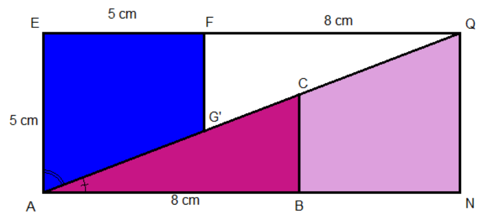


fig.2

2a. Le triangle ABC étant rectangle en B, $\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{BA} = \frac{3}{8} = 0,375$. La calculatrice nous permet de trouver $\widehat{BAC} \approx 20,5°$.

(GD) étant perpendiculaire à [EC], [GD] est aussi perpendiculaire à [DA']. Le triangle GDA' est donc rectangle en D et $\tan \widehat{DA'G} = \frac{DG}{DA'} = \frac{5}{2} = 2,5$. En effet $DA' = EC - (ED + A'C) = 8 - (3+3) = 2$. $\widehat{DA'G} \approx 68°$.

Les points E, D, A' étant alignés, $\widehat{EA'G} \approx 68°$.

b. Le trapèze bleu EFGA' de la *figure 1* se superpose avec la figure bleue de la *figure 2*, et l'angle $\widehat{EA'G}$ se superpose avec l'angle $\widehat{EAG'}$ (en appelant G' le quatrième sommet du trapèze) de la *figure 2*.

$\widehat{EAG'}+\widehat{BAC} \approx 68° + 20{,}5° \neq 90°$. L'angle $\widehat{EAB}$ étant droit, on peut conclure que dans la *figure 2*, les côtés [AG'] du trapèze bleu et [AC] du triangle rectangle ABC ne sont pas superposés. Le rectangle AEQN n'est donc pas entièrement recouvert par les pièces du puzzle (*fig.2bis*).

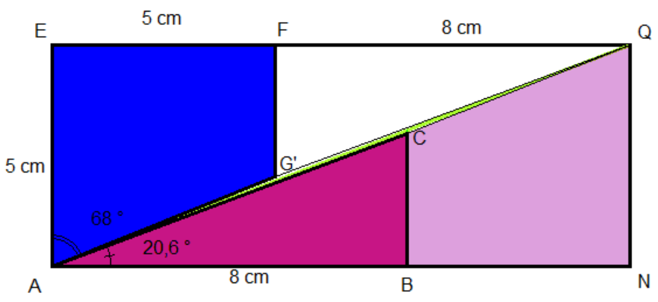


fig.2bis

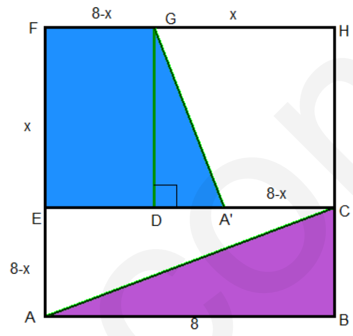


fig.3

3a. Sur la *fig.3*, $FE = x$ avec $0 < x < 8$ $\quad CH = GH = A'E = x$ $\quad FG = A'C = AE = BC = 8 - x$

Tan $\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{8}{8-x}$ $\quad$ tan $\widehat{DA'G} = \dfrac{DG}{DA'} = \dfrac{x}{2x-8}$ avec $DA' = 8-(8-x+8-x) = 8-16+2x = 2x-8$

b. Pour que le découpage convienne, il faut que les droites (AC) et (AG') de la *figure 2bis* se superposent, donc que les angles $\widehat{EAG'}$ et $\widehat{CAB}$ soient complémentaires. Il faut donc que les angles $\widehat{EA'G}$ (*fig.3*) et $\widehat{CAB}$ soient égaux, c'est-à-dire $\widehat{DA'G}$(*fig.3*) et $\widehat{ACB}$ puisque $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires dans le triangle rectangle ABC.

On admet que deux angles aigus ayant la même tangente sont égaux. Il faut donc que $\dfrac{8}{8-x} = \dfrac{x}{2x-8}$, soit

$8 \times (2x-8) = x \times (8-x)$ $\quad 16x - 64 = 8x - x^2$ $\quad x^2 + 8x = 64$ $\quad x(x+8) = 64$

Or $GH = QN = x$ et $AN = AB + BN = AB + CH = x + 8$.

Le premier membre de l'égalité représente donc l'aire du rectangle AEQN, et 64 représente l'aire du carré initial ABHF.

4a. $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$ $\quad$ On en déduit que $(x+4)^2 - 16 = x^2 - 8x = 64$ $\quad$ soit $(x+4)^2 = 80$

D'où $x+4 = \sqrt{80}$ *ou* $x+4 = -\sqrt{80}$, soit $x+4 = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$ *ou* $x+4 = -4\sqrt{5}$

b. Le cas $x = -4 - 4\sqrt{5}$ est impossible, x étant une longueur positive. La seule solution est donc la valeur positive $x = 4\sqrt{5} - 4 = 4(\sqrt{5} - 1)$