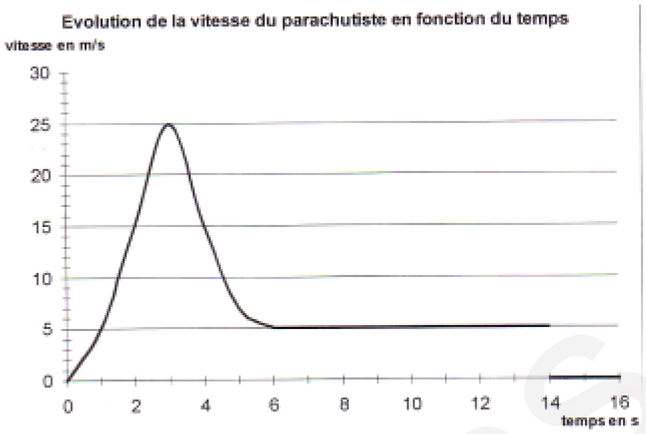
S17C. Autour de la NOTION de FONCTION Corrigé
Fonctions linéaires et affines-Représentations graphiques

Mise en route[1]

A. Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse d'un parachutiste lors d'un saut.



Pendant la chute, la vitesse du parachutiste est constante sur deux intervalles [6 ; 14] et]14 ;16], moment de l'arrivée au sol.

Les coordonnées du point correspondant à l'ouverture du parachute sont (3 ; 25). Ce point se repère au changement de vitesse qui passe d'une accélération (de 0 à 25 m/s) à un ralentissement. La vitesse diminue progressivement (de 25 à 5 m/s).après une vitesse très rapide pendant la chute libre, et avant de se stabiliser.

La chute dure 14s, la seconde moitié dure 7s sur l'intervalle [7 ; 14]. La vitesse est constante et de 5m/s ; la distance parcourue est donc de $\mathrm{v}\times\mathrm{t} = 5\times 7 = 35m$

Sa vitesse moyenne de chute est de $v=\dfrac{d}{t}=\dfrac{115}{14}$ soit environ 8,214*m/s*

Pour exprimer la vitesse en *km/h*, il faut multiplier par 3600 (temps en *h*) et diviser par 1000 (distance en *km*) soit $\dfrac{8,214\times 3600}{1000}\approx 29,57\ \ km/h$.

Remarque : les unités de vitesse s'expriment maintenant sous la forme $m\times s^{-1}$ et $km\times h^{-1}$

B.

I. La vitesse étant exprimée en *km/h* et la distance en *km*, la durée du trajet exprimée en heure s'obtient par $t=\dfrac{d}{v}=\dfrac{132}{168}\approx 0,7857\ \ h$. Exprimée en minutes, elle est d'environ 48minutes car $0,7857\times 60\approx 48$.

II. 1. Pour 500km

$P_A = 0,12\times 0,75\times 500 = 0,09\times 500 = 45$ et $P_B = 0,12\times 0,5\times 500+30 = 0,06\times 500+30 = 60$

[1] Aix 2004/ Bordeaux 2002

	Tarif A	Tarif B
Dépense annuelle pour 500km	45	60
Dépense annuelle pour 1500km	135	120

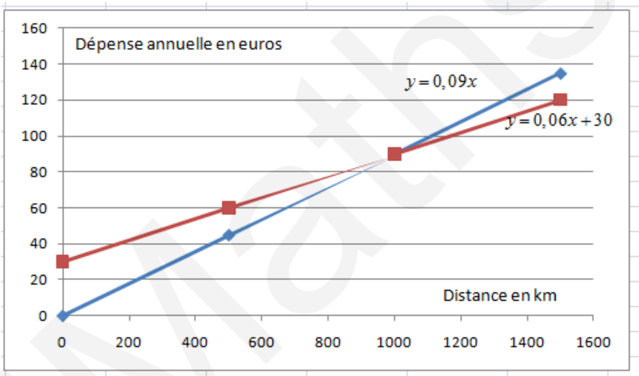
2. $t_1 = 0{,}09 \times x$ $\quad$ $t_2 = 0{,}06 \times x + 30$

3. $0{,}06x + 30 < 0{,}09x$ $\quad$ $0{,}06x - 0{,}09x < -30$ $\quad$ $-0{,}03x < -30$ $\quad$ $0{,}03x > 30$ $\quad$ $x > 1000$

L'achat de la carte « 15-25 » devient avantageux à partir de 1000*km* puisque le prix à payer avec la carte (t_2) est alors inférieur au prix sans carte (t_1)

3. La droite d_1 d'équation $y = 0{,}09x$ passe par les points de coordonnées (0, 0), (500, 45) et (1000, 90) et la droite d_2 d'équation $y = 0{,}06x + 30$ passe par les points de coordonnées (0, 30), (500, 60) et (1000, 90).

4. Les deux droites se coupent au point de coordonnées (1000, 90) qui représente le nombre de kilomètres où le prix à payer est le même avec les deux tarifs soit 90€. On constate sur le graphique que la droite d_2 est en dessous de la droite d_1 à partir de ce point, ce qui montre que pour une valeur de x choisi, le tarif t_2 est inférieur au tarif t_1.



C.

Il n'y a pas proportionnalité entre les deux températures $T°F$ *et* $T°C$, car par exemple pour $T°C = 0$, on constate que $T°F$ n'est pas nul. Par contre on peut voir que, quand les écarts de températures Celsius sont de 5°, les écarts des températures Fahrenheit sont régulièrement de 9°. On dit qu'il y a proportionnalité des écarts (ou des accroissements).

On peut alors compléter le tableau ci-dessous :

T°C	-30°	-15°	0°	10°	40°	90°
T°F	-22°	5°	32°	50°	104°	194°

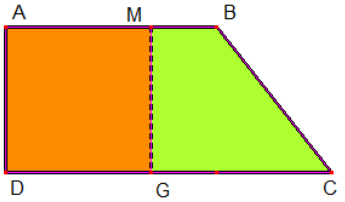
On constate qu'en appelant f la fonction associant $T°C$ à $T°F$, pour deux températures Celsius *a et b* données, alors $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} = \dfrac{9}{5} = 1{,}8$. Connaissant une température $T°C$, on peut donc conjecturer que cette fonction est affine et écrire $T°F = 1{,}8 \times TC° + 32°$

Le titre du film " Fahrenheit 451 " fait allusion à la température du feu qui vaut en degré Celsius : $1{,}8 \times TC° + 32° = 451$ $\quad$ $1{,}8 \times T°C = 419$ $\quad$ $T°C \approx 232{,}8°$

Pour s'exercer

Exercice 1

AB = 50 m, AD = 30 m, DC = 70 m. Â et $\widehat{D}$ sont droits. AM = x. La droite (AD) est parallèle à (MG).



4.

Le jardin est ainsi partagé en deux parties, d'une part le rectangle AMGD qui est le potager, d'autre part le reste qui est la pelouse.

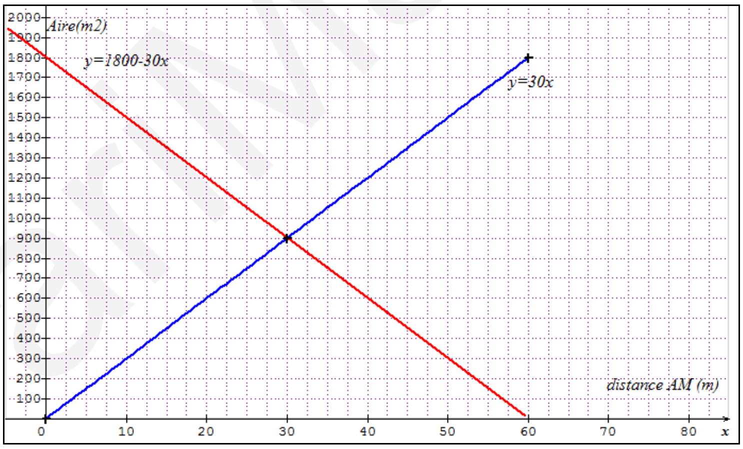
1. $A_{trapeze} = \frac{(petite\ base + grande\ base) \times hauteur}{2} = \frac{(50+70)\times 30}{2} = 1800 m^2$

2. Le potager AMGD est un rectangle ayant pour dimensions *x et 30*. $A_{AMGD} = 30x$ et $A_{BCGM} = 1800 - 30x$

3. $1800 - 30x = 30x \qquad 60x = 1800 \qquad x = 30$

La pelouse et le potager ont la même aire pour $x = 30$. Le potager a alors la forme d'un carré.

4. La fonction donnant l'aire du potager AMGD en fonction de x est définie par $f(x) = 30x$. C'est donc une fonction linéaire et la représentation graphique est une droite qui passe par l'origine et le point (20, 600). La fonction donnant l'aire de la pelouse BCGM en fonction de x est définie par $g(x) = 1800 - 30x$. C'est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite passant par les points (0, 1800) et (60, 0). On peut remarquer que sa pente est négative.



5. Les deux droites se coupent au point de coordonnées (30, 900) qui correspond à la valeur de x pour laquelle les deux aires sont égales à $900 m^2$.

6. Sachant que dix kilos de semences sont nécessaires pour une pelouse de 500 m², on peut supposer que la quantité de semences est proportionnelle à la surface.

Quantité de semences (kg)	10	?
Surface (m^2)	500	900

La quantité cherchée peut se trouver

- par le coefficient de proportionnalité $\times 50$; d'où $900:50=18kg$
- par l'égalité des produits en croix : $10\times 900=50\times x \quad x=9000:5=18kg$
- par la linéarité multiplicative : pour $100m^2$, il faudra $2kg$ donc pour $900m^2$, il faudra 9fois plus soit $18kg$

Exercice 2

L'arête du grand cube mesure 80 cm, celle du petit cube mesure 60 cm.

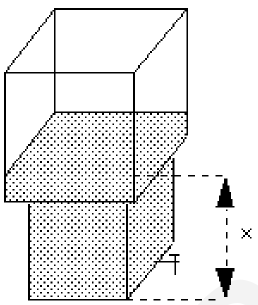
1. Le volume total de la cuve est la somme des volumes des deux cubes soit $V=80^3+60^3=512000+216000=728000cm^3=728dm^3=728l$

2. Si on désigne par *x* (*en cm*) la hauteur du liquide dans la cuve et par *V(x)* le volume, en litres, du liquide correspondant, il faut veiller à la concordance des unités.

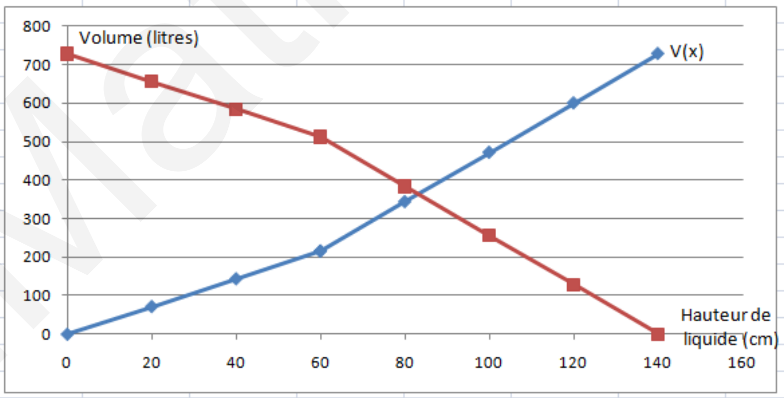
$Si\ x<60$, le volume est de $V(x)=60\times 60\times x=3600x$ en cm^3, $soit V(x)=3{,}6x$ en litres.

$Si\ x>60\ V(x)=216000+80\times 80\times(x-60)=216000+6400x-384000=6400x-168000\ en\ cm^3$
$ou\ V(x)=6{,}4x-168\ en\ litres.$

3. La représentation graphique de $V(x)$ est formée de deux segments. Pour $0\leq x\leq 60$, la fonction V est linéaire, le segment passe par l'origine et le point de coordonnées (60, 216). Pour $60<x\leq 140$, la fonction est affine, le segment passe par le point (60, 216) et par le point (120, 600).



3. et 5.



4. $W(x)=728-3{,}6\,x\ si\ 0\leq x\leq 60$ et $W(x)=896-6{,}4\,x\ si\ 60<x\leq 140$

$W(x)$ représente la différence entre le volume plein du récipient et le volume de liquide contenu, en fonction de la hauteur *x* de liquide. C'est donc le volume restant à remplir.

5. De même que pour *V(x)* la représentation graphique de *W(x)* est formée de deux segments, l'un associé à $0\leq x\leq 60$, l'autre associé à $60<x\leq 140$.

6. .Les coordonnées du point d'intersection des deux droites sont environ (80, 360).

Si *V(x)=W(x),* alors les deux volumes sont égaux et la cuve est à moitié pleine (en volume). Elle contient donc *364 litres* de liquide. Comme le petit cube contient 216 litres, il y a 148 litres dans le grand cube, soit une hauteur égale à : $148=8\times 8\times(h-6)$ soit $64h=532$ d'où $h=8{,}3125dm=83{,}125cm$.

Exercice 3

Pour obtenir un billet de tombola, il faut acheter 1 sac de 1 kg de terreau à 1,50 € ou 1 paquet de 250 g de graines à 3 €. Le client veut obtenir le plus grand nombre possible de billets de tombola, pour 14,25 € au plus et pour 5 kg de marchandises maximum. Le nombre de sacs est compris strictement entre 2 et 6 et le nombre de paquets est compris strictement entre 1 et 4.

a. Une méthode *expérimentale* peut consister à tester tous les cas possibles dans un tableau et à ne retenir que les solutions respectant les contraintes de l'énoncé :

Paquets/Sacs	3	4	5
2	$3\times1+2\times0,25=3,5kg$ $3\times1,5+2\times3=10,5€$ 5 *billets*	$4\times1+2\times0,25=4,5kg$ $4\times1,5+2\times3=12€$ 6 *billets*	$5\times1+2\times0,25=5,5kg$ *non acceptable car supérieur à 5kg*
3	$3\times1+3\times0,25=3,75kg$ $3\times1,5+3\times3=13,5€$ 6 *billets*	$4\times1+3\times0,25=4,75kg$ $4\times1,5+3\times3=15€$ *non acceptable car supérieur à 14,25 €*	$5\times1+3\times0,25=5,75kg$ *non acceptable car supérieur à 5kg*

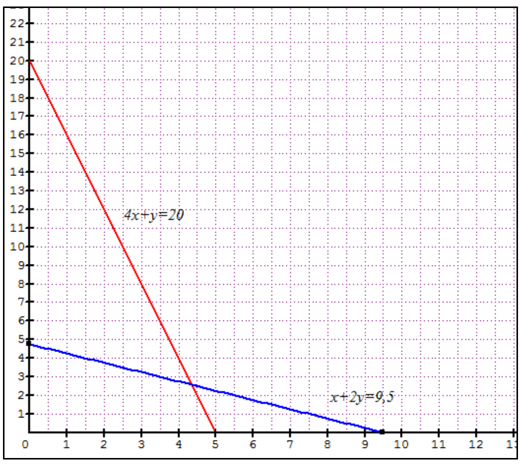
Il y a donc deux cas où le client peut se procurer le maximum de billets : soit 3 paquets de graines et 3 sacs de terreau, soit 2 paquets de graines et 4 sacs de terreau.

b. Méthode algébrique. Soit $\boldsymbol{x}$ le nombre de sacs et $\boldsymbol{y}$ le nombre de paquets :

$$2<x<6 \text{ et } 1<y<4$$
$$M(kg)=x\times1+y\times0,25=x+0,25y \quad \text{et} \quad \text{P}(€)=x\times1,5+y\times3=10,5=1,5x+3y$$
$$M\le5 \text{ et } P\le14,25$$

D'où le système $\begin{cases}x+0,25y\le5 & (1)\\1,5x+3y\le14,25 & (2)\end{cases}$, équivalent au système $\begin{cases}4x+y\le20\\x+2y\le9,5\end{cases}$, obtenu en divisant l'inéquation (2) par 1,5 et en multipliant par 4 l'inéquation (1).

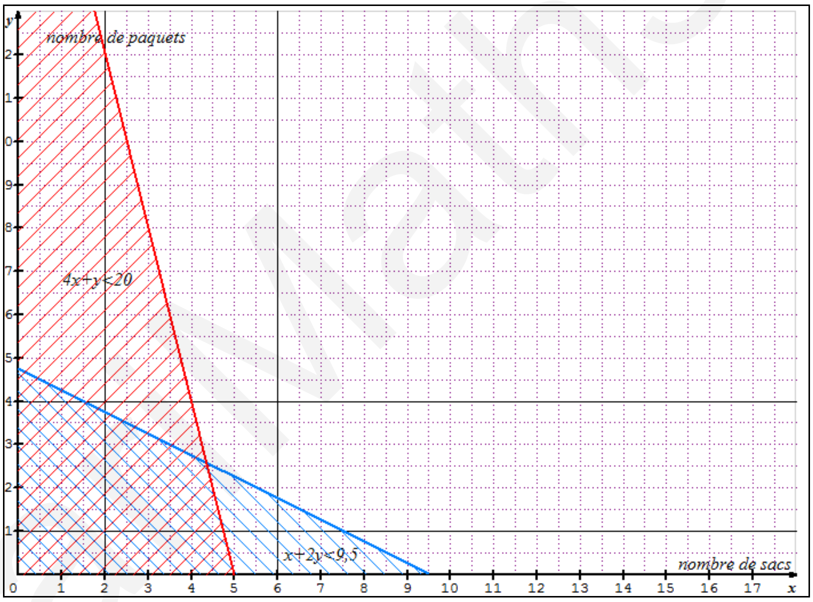
c. La droite (D1) d'équation $x+2y=9,5$ passe par les points de coordonnées (0 ; 4,75), (1,5 ; 4), (9,5 ; 0). La droite (D2) d'équation $4x+y=20$ passe par les points de coordonnées (0, 20), (3,8), (5,0). *Trois points suffisent pour s'assurer de l'alignement.*



d. Pour trouver graphiquement les solutions du système de la question b. il faut savoir qu'une droite partage le plan en deux demi plans dont elle est la frontière. Ainsi la droite (D1) est l'ensemble des points (x, y) tels que $x+2y=9{,}5$ (ou encore $1{,}5x+3y=14{,}25$). Dans un des deux demi-plans définis par (D1), les coordonnées de tous les points vérifient $x+2y<9{,}5$, dans l'autre demi-plan les coordonnées de tous les points vérifient $x+2y>9{,}5$. Il reste à trouver quel est le demi-plan associé à chaque inéquation.

Pour le trouver on fait un test avec les coordonnées d'un point spécifique, souvent l'origine (0,0). Ainsi *pour* $x=0$ *et* $y=0$, $x+2y=0$ *donc* $x+2y<9{,}5$. C'est donc le demi-plan contenant l'origine du repère (ici en dessous de la droite) qui contient les points dont les coordonnées vérifient l'inéquation (2).

La droite (D2) est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $4x+y=20$ (ou encore $x+0{,}25y=5$). Comme précédemment *pour* $x=0$ *et* $y=0$, $4x+y=0$ *donc* $4x+y<20$. Le demi-plan contenant l'origine du repère (ici en dessous de la droite) est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $4x+y<20$, soit l'inéquation (1) du système b. Les solutions du système se trouvent donc à l'intersection de ces deux régions du plan.



Mais comme le contexte du problème impose des solutions entières vérifiant $2<x<6$ *et* $1<y<4$, les seules couples solutions sont (3, 2), (3, 3), (4, 2). Le nombre de billets devant être maximal, on ne garde que les deux solutions (déjà trouvées en 1.) vérifiant $x+y=6$, soit (3, 3) et (4, 2).