S18C. Autour de GRANDEURS et de leur MESURE Corrigé
Longueur, Périmètre, Aire

Mise en route

A. En fait ces six théorèmes « en acte » sont faux.

T1. *Deux rectangles de même aire sont identiques* **: Faux**

Ainsi deux rectangles ayant pour dimensions l'un 9cm et 4cm, l'autre 12cm et 3cm, ont chacun une aire de 36cm². Pourtant ils ne sont pas superposables.

T2. *Deux rectangles de même aire ont même périmètre* **: Faux**

Les deux rectangles précédents ont pour aire 36cm², et pour périmètre l'un 26cm et l'autre 30cm.

T 3. *Deux rectangles de même périmètre ont même aire* **: Faux**

Voici à nouveau un contre exemple : un rectangle de dimensions 3cm et 7cm et un rectangle de dimensions 6cm et 4cm ont tous deux pour périmètre 20cm, mais le premier a pour aire 21 cm² et le second 24 cm².

T4. *L'aire et le périmètre varient dans le même sens* **: Faux**

Là encore un contre exemple montre que c'est faux. Un rectangle A de dimensions 4cm et 12 cm a un périmètre de 32cm et une aire de 48cm². Un rectangle B de dimensions 1cm et 20cm a un périmètre 42cm, donc supérieur à celui du rectangle A. Par contre l'aire du rectangle B est égale à 20cm², elle est donc inférieure à celle du rectangle A.

T5. *Deux surfaces qui ont les mêmes côtés ont la même aire* **: Faux**

Si l'on considère un carré de côté 5cm, son aire est égale à 25 cm².

Par ailleurs un losange ayant des diagonales respectivement de longueurs 6cm et 8cm, a aussi des côtés de longueur 5cm. En effet les diagonales du losange partagent celui-ci en quatre triangles rectangles isométriques ayant pour côtés de l'angle droit les demi-diagonales, soit de mesure 3cm et 4cm. L'hypoténuse de ces triangles rectangles, qui sont les côtés du losange, mesure alors 5cm (d'après le théorème de Pythagore).

L'aire de ce losange est égale à : $A = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{d}{2} \times \frac{d'}{2} = \frac{d \times d'}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = 24cm^2$

T6. *L'aire d'un carré est proportionnelle à son côté* **: Faux**

L'aire d'un carré s'exprime sous la forme $A = c^2$. Il n'y a donc pas de relation de proportionnalité entre l'aire et le côté d'un carré, puisqu'il n'y a pas de coefficient multiplicatif entre ces deux grandeurs. *La représentation graphique de l'aire d'un carré en fonction de la mesure de son côté est une parabole.* Par contre le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur de son côté ; en effet $P = 4c$. Le coefficient de proportionnalité est égal à 4.

II.

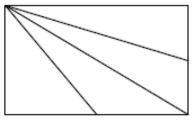


Figure 1

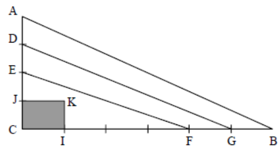
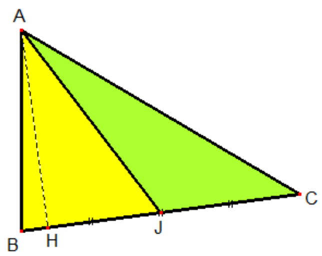


Figure 2

1. Soit L et l la longueur et la largeur du rectangle. Quand on partage le rectangle selon ses deux diagonales, on obtient quatre triangles, deux à deux isométriques. Deux des triangles ont pour côté L, et la hauteur associée est $\frac{l}{2}$; leur aire est égale à : $A_1 = \frac{1}{2} \times L \times \frac{l}{2} = \frac{1}{4} \times L \times l$. Les deux autres triangles ont pour côté l, et la hauteur associée est $\frac{L}{2}$; leur aire est égale à : $A_2 = \frac{1}{2} \times l \times \frac{L}{2} = \frac{1}{4} \times L \times l$. Les quatre triangles ont donc bien la même aire qui est le quart de l'aire du rectangle.
2. Dans la figure 1, on peut voir que le rectangle est partagé en quatre triangles. Deux de ces triangles ont un côté qui est la moitié de la longueur du rectangle, et la hauteur associée est la largeur du rectangle. Leur aire est donc $A_1 = \frac{1}{2} \times l \times \frac{L}{2} = \frac{1}{4} \times L \times l$. Les deux autres triangles ont un côté qui est la moitié de la largeur du rectangle, et la hauteur associée est la longueur du rectangle L. Leur aire est donc $A_2 = \frac{1}{2} \times L \times \frac{l}{2} = \frac{1}{4} \times L \times l$. Les quatre triangles représentent donc des parts égales au quart de l'aire du rectangle.

   On pourra retenir plus généralement que la médiane d'un triangle partage le triangle en deux triangles de même aire.

   En effet, bien que les deux triangles obtenus ne soient pas isométriques, ils ont un côté de même longueur et la hauteur relative à ce côté est la même.

3. Dans la figure 2, ABC est un triangle rectangle en C. Le segment [CB] est partagé en six segments de longueur CI, et le segment [AC] est partagé en quatre segments de longueur CJ. On peut noter BC=6u et AC=4v et, u et v représentant respectivement les longueurs CI et CJ que l'on choisit comme unité. Le rectangle CIKJ a alors comme aire uv qui va représenter l'unité d'aire. Le triangle EFC est rectangle ; son aire est égale à : $A_{EFC} = \frac{1}{2} \times CE \times CF = \frac{1}{2} \times 2v \times 4u = 4uv$

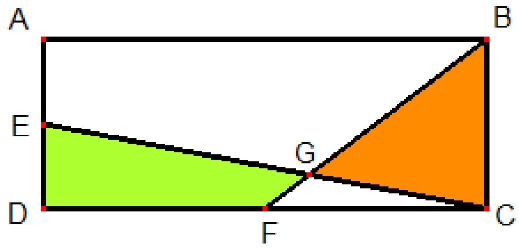
   Le polygone DGFE a pour aire la différence entre l'aire du triangle rectangle CDG et l'aire du triangle EFC : $A_{DGFE} = A_{CDG} - A_{EFC} = \frac{1}{2} \times 5u \times 3v - 4uv = 7{,}5uv - 4uv = 3{,}5uv$

   Le polygone ABGD a pour aire la différence entre l'aire du triangle ABC et l'aire du triangle DGC, qui est elle-même la somme de l'aire du triangle EFC et de l'aire du polygone DGFE :

$$A_{ABGD} = A_{ABC} - (A_{EFC} + A_{DGFE}) = \frac{1}{2} \times 6u \times 4v - (4uv + 3,5uv) = 12uv - 7,5uv = 4,5uv$$

Les trois parts ne sont donc pas égales

III. F étant le milieu du segment [CD] et E étant le milieu de [AD], on a $DE = \frac{1}{2}DA$ et $CF = \frac{1}{2}CD$



L'aire du triangle DEC est égale à : $A_{DEC} = \frac{1}{2} \times DE \times DC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} DA \times DC = \frac{1}{4} A_{ABCD}$

L'aire du quadrilatère EDFG est la différence entre l'aire du triangle DEC et l'aire du triangle CFG.

On en déduit que $A_{EDFG} = \frac{1}{4} A_{ABCD} - A_{CFG}$

De même que précédemment, $A_{BCF} = \frac{1}{2} \times CF \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} CD \times BC = \frac{1}{4} A_{ABCD}$

L'aire du triangle BCG est la différence entre l'aire du triangle BFC et l'aire du triangle CFG.

D'où $A_{BCG} = A_{BCF} - A_{CFG} = \frac{1}{4} A_{ABCD} - A_{CFG}$ .Le quadrilatère EDFG a donc la même aire que le triangle BCG.

IV. Soit L la longueur de l'affiche, et l sa largeur, exprimées en centimètres. Quand on plie l'affiche en 4 dans le sens de la longueur et en 3 dans le sens de la largeur, on obtient un rectangle dont les dimensions sont $\frac{L}{4}$ et $\frac{l}{3}$. Or d'après l'énoncé, on obtient ici un carré, c'est-à-dire qu'on a $\frac{L}{4} = \frac{l}{3}$, soit $3L = 4l$. On sait par ailleurs que le périmètre de l'affiche est égal à 294 cm : on a donc $2 (L + l) = 294$, soit $L + l = 147$ cm.

On résout alors le système suivant $\begin{cases} 3L = 4l \\ L + l = 147 \end{cases}$ $\begin{cases} 3(147 - l) = 4l \\ L = 147 - l \end{cases}$ $\begin{cases} 7l = 441 \\ L = 147 - l \end{cases}$ $\begin{cases} l = 63 \\ L = 147 - 63 = 84 \end{cases}$

Les dimensions de l'affiche sont donc 63*cm et* 84*cm*.

V. Il y a dans ce rectangle trois types de disques : soient r_1, r_2, r_3 leurs rayons respectifs dans l'ordre croissant. La largeur l du rectangle comporte cinq grands disques, tangents les uns aux autres. On a donc $l = 5 \times 2 \times r_3 = 10r_3 = 15cm$ d'où $r_3 = 1,5cm$

Sur la longueur du rectangle sont placés huit grands disques et sept petits disques. On a donc :

$L = 8 \times 2 \times r_3 + 7 \times 2 \times r_1 = 16 \times 1,5 + 14r_1 = 31cm$ d'où $r_1 = \frac{31 - 24}{14} = \frac{7}{14} = 0,5cm$

Il reste à trouver les rayons r_2 des disques blancs. Sur la largeur sont disposés 4 disques blancs et 5 petits disques, et il reste de part et d'autre une longueur égale à la différence entre r_3 *et* r_1, compte tenu de l'alignement des centres des disques le long de la longueur. D'où :

$$l = 4\times 2\times r_2 + 5\times 2\times r_1 + 2\times(r_3 - r_1) = 8r_2 + 10r_1 + 2\times 1 = 8r_2 + 7 = 15cm \text{ soit } r_2 = \frac{15-7}{8} = 1cm$$

Les trois disques ont donc respectivement pour rayons 0,5*cm*, 1*cm*, *et* 1,5*cm*.

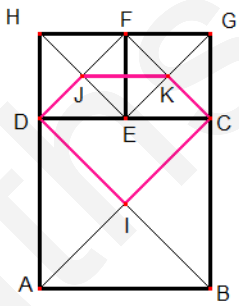
VI. Le prix P_1 (en euros) du terrain rectangulaire de longueur L s'exprime : $P_1 = 26\times L\times 130$

Le prix P_2 (en euros) du second terrain trapézoïdal est égal à : $P_2 = \frac{(80+50)\times 52}{2}\times 110 = 3380\times 110 = 371800$

Comme les deux terrains ont le même prix de vente $P_1=P_2$, d'où : $26L\times 130 = 371800$ soit $L = 110m$

VII. ABCD, DEFH et ECGF sont trois carrés. On sait que AB=8cm.

La surface délimitée par le pentagone ICKJD est composée de la surface délimitée par le triangle ICD et des trois surfaces délimitées par les triangles DJE, JEK, EKC.



ABCD étant un carré de centre I, l'aire du triangle IDC est la quart de l'aire du carré ABCD. Les deux carrés DEFH et ECGF ont pour centres respectifs J et K, l'aire de chacun des triangles DJE, JEK, EKC est donc égale au quart de l'aire du carré DEFH. D'où $A_{\text{ICKJD}} = A_{DIC} + A_{DJE} + A_{JEK} + A_{EKC} = \frac{1}{4}\times A_{ABCD} + 3\times\frac{1}{4}\times A_{DEFH}$

E étant le milieu du segment [DC], les deux carrés DEFH et ECGF ont pour côté 4cm.

$A_{ABCD} = 8^2 = 64cm^2$ et $A_{DEFH} = 4^2 = 16cm^2$ $\qquad$ $A_{\text{ICKJD}} = \frac{1}{4}\times 64 + 3\times\frac{1}{4}\times 16 = 16 + 12 = 28cm^2$

VIII. 1. Soit L *et* l la longueur et la largeur respectives du rectangle. L'aire initiale du rectangle est $A = L\times l$.

La nouvelle aire de ce rectangle après modification est $A' = (L + \frac{1}{5}L)(l - \frac{1}{2}l) = \frac{6}{5}L\times\frac{1}{2}l = \frac{6}{10}\times L\times l = \frac{6}{10}A$

A' vaut donc les $\frac{6}{10}$ de A, soit 60% de A qui a diminué.

2. Cette fois $A'' = (L + \frac{1}{4}l)(l - \frac{1}{4}l) = \frac{5}{4}L\times\frac{3}{4}l = \frac{15}{16}\times L\times l = \frac{15}{16}A$. L'aire est donc modifiée puisque $\frac{15}{16}\neq 1$.

Pour s'exercer[1]

Exercice 1

La formule de Héron d'Alexandrie (1er siècle après JC) permet de calculer l'aire d'un triangle connaissant les longueurs des côtés *a*, *b* et *c* et le demi-périmètre *p* du triangle $A_{MAT} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

1. Le périmètre du triangle vaut $4,2+5,6+7=16,8cm$ et son demi périmètre $p=8,4cm$

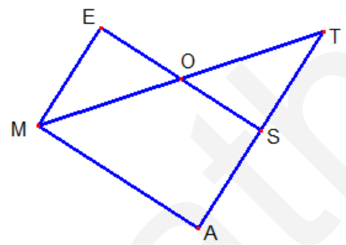
En appliquant la formule de Héron :

$$A_{MAT} = \sqrt{(8,4-4,2)(8,4-5,6)(8,4-7)} = \sqrt{8,4\times4,2\times2,8\times1,4} = \sqrt{138,2976} = 11,76cm^2$$

2. Pour calculer l'aire de ce triangle d'une autre façon, ne connaissant que ses côtés, on peut conjecturer que ce triangle est rectangle et le démontrer avec la réciproque du théorème de Pythagore.

$MA^2 = 17,64 \qquad AT^2 = 31,36 \qquad MA^2 + AT^2 = 49$ et $MT^2 = 49$

Donc $MA^2 + AT^2 = MT^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MAT est rectangle d'hypoténuse [MT]. $A_{MAT} = \dfrac{MA\times AT}{2} = \dfrac{4,2\times5,6}{2} = 11,76cm^2$



3. O étant le milieu de [MT] et S celui de [AT] $TS = \frac{1}{2}TA$ et $TO = \frac{1}{2}TM$. La longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés dans un triangle est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

Donc $OS = \frac{1}{2}AM$. Le triangle TOS est une réduction à l'échelle $\frac{1}{2}$ du triangle TMA, son aire est donc réduite dans le rapport $\frac{1}{4}$. $A_{TOS} = \frac{1}{4}A_{TMA} = 2,94cm^2$

4. L'aire du quadrilatère MASE est formée de l'aire du quadrilatère MASO et de l'aire du triangle MOE.

Le point E est le symétrique du point S par rapport à O. D'autre part O est le milieu de [MT]. Le point M est donc le symétrique du point T par rapport à O et le triangle MOE est le symétrique du triangle TSO dans cette symétrie. Ils sont donc isométriques et leurs aires sont égales.

$$A_{MASE} = M_{MOE} + A_{MASO} = A_{TOS} + A_{MASO} = A_{MAT} = 11,76cm^2$$

5. On vient de démontrer que MAT et MASE ont la même aire. On s'interroge maintenant sur leur périmètre.

$P_{MASE} = MA + AS + SE + EM$ et $P_{MAT} = MA + AT + TM = MA + AS + ST + TM$

On a vu précédemment que $ST=EM.$, et que $SE = 2\times SO = MA$.

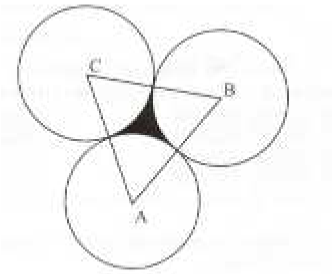
$$P_{MASE} = MA + AS + SE + EM = MA + AS + MA + ST$$

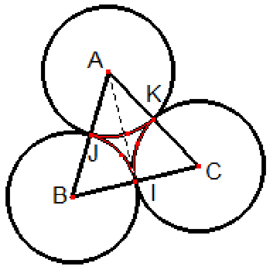
Or on sait que le triangle MAT est rectangle. Son hypoténuse [TM] a donc une longueur supérieure à celle de [MA]. $TM < MA$ donc $P_{MAT} < P_{MASE}$

---

1 Bordeaux 2004- Besançon 2005- ?- Aix-Marseille 98-2008gpe4

Exercice 2





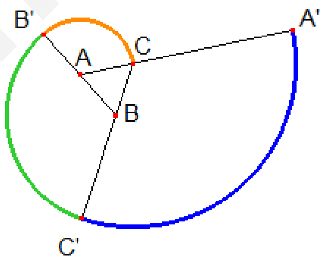
L'aire de la partie noire est la différence entre l'aire du triangle ABC et l'aire des trois secteurs circulaires. ABC est un triangle équilatéral car chaque côté mesure 2rayons, soit 2r. Soit I, J, K les milieux respectifs de [BC], [BA], [AC]. [AI] est la médiane du triangle équilatéral, c'est donc aussi la médiatrice et la hauteur du triangle. Le triangle AIB est rectangle en I. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = BI^2 + AI^2$ avec $BI=r$ *et* $AB=2r$. D'où $AI^2 = 3r^2$ et $AI = r\sqrt{3}$

Soit A_{ABC} l'aire du triangle ABC. $A_{ABC} = \dfrac{base \times hauteur}{2} = \dfrac{2r \times r\sqrt{3}}{2} = r^2\sqrt{3}$.

On sait d'autre part que $A_{disque} = \pi r^2$. Le triangle ABC étant équilatéral, chacun de ses angles mesure 60°, et les secteurs circulaires engendrés par ses trois angles représentent $\dfrac{1}{6}$ du disque plein. Chaque aire est donc égale à $\dfrac{\pi r^2}{6}$.

L'aire totale des trois secteurs vaut $A_{secteurs} = \dfrac{\pi r^2}{2}$. On en déduit : $A_{noire} = r^2\sqrt{3} - \dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{r^2(2\sqrt{3} - \pi)}{2}$

Exercice 3



1. ABC étant un triangle équilatéral, il a ses trois côtés isométriques. On note *a* son côté. La spirale est formée d'un premier arc de cercle de centre A, de rayon *a*. Cet arc a pour extrémités le point C et le point B' symétrique du point B par rapport à A. L'angle $\widehat{ACB'}$ mesure 120° (180°-60°) donc cet arc représente $\dfrac{1}{3}$ du premier cercle. Le second arc de cercle a pour centre B et rayon *2a*. Cet arc a pour extrémités le point B' et le point C', intersection de ce cercle avec la demi-droite [CB). L'angle $\widehat{B'BC'}$ mesure aussi 120° et représente donc $\dfrac{1}{3}$ du second cercle. Le troisième arc a pour centre C et pour rayon *3a*. Il a pour extrémités le point C' et

le point A’, intersection de ce cercle avec la demi-droite [AC). L’angle $\widehat{C'CA'}$ mesure lui aussi 120° et l’arc représente $\frac{1}{3}$ de ce cercle.

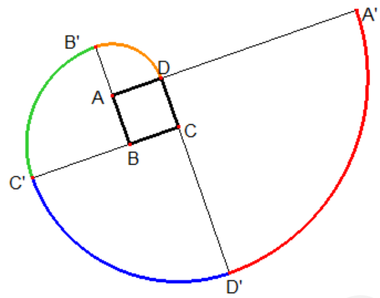
2. Tracer un carré ABCD de côté *a*. Tracer les demi-droites [BA), [CB), [DC), [AD)

Tracer le quart de cercle $\overset{\frown}{DB'}$ de centre A, de rayon *a*, B’ est le point d’intersection avec [BA).

Tracer le quart de cercle $\overset{\frown}{B'C'}$ de centre B, de rayon 2*a*, C’est le point d’intersection avec [CB).

Tracer le quart de cercle $\overset{\frown}{C'D'}$ de centre C, de rayon 3*a*, D’est le point d’intersection avec [DC).

Tracer le quart de cercle $\overset{\frown}{D'A'}$ de centre D, de rayon 4*a*, A’ est le point d’intersection avec [AD).



3. La spirale à base triangulaire de côté *a* a pour longueur :

$$L_3 = \frac{1}{3}\times 2\pi a + \frac{1}{3}\times 2\pi \times 2a + \frac{1}{3}\times 2\pi \times 3a = \frac{1}{3}\times 2\pi \times 6a = 4\pi a$$

La spirale à base carrée de côté *a* a pour longueur :

$$L_4 = \frac{1}{4}\times 2\pi a + \frac{1}{4}\times 2\pi \times 2a + \frac{1}{4}\times 2\pi \times 3a + \frac{1}{4}\times 2\pi \times 4a = \frac{1}{4}\times 2\pi \times 10a = 5\pi a$$

4. Si le triangle a pour côté 10cm, la longueur de la spirale est $L_3 = 40\pi$. D’où

$L_4 = 40\pi = 5\pi a$, soit $5a = 40$ *et* $a = 8$

5. On peut conjecturer que chaque arc de cercle construit à partir du pentagone représente $\frac{1}{5}$ de chaque cercle ayant respectivement comme rayon *a, 2a, 3a, 4a, 5a*.

D’où $L_5 = \frac{1}{5}\times 2\pi a + \frac{1}{5}\times 2\pi \times 2a + \frac{1}{5}\times 2\pi \times 3a + \frac{1}{5}\times 2\pi \times 4a + \frac{1}{5}\times 2\pi \times 5a = \frac{1}{5}\times 2\pi \times 15a = 6\pi a$

Il semble que pour un polygone à *n* côtés, la longueur de la spirale sera $L_n = (n+1)\pi a$

En effet

$$L_n = \frac{1}{n}\times 2\pi a + \frac{1}{n}\times 2\pi \times 2a + \frac{1}{n}\times 2\pi \times 3a + ... + \frac{1}{n}\times 2\pi \times na = \frac{1}{n}\times 2\pi \times (1+2+...+n)a = \frac{2\times(1+2+...+n)}{n}\pi a$$

$$or \quad 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad d'où \quad L_n = \frac{2\times\frac{n(n+1)}{2}}{n}\pi a = (n+1)\pi a$$

Exercice 4

Dans cet exercice les aires sont en cm^2, les longueurs en *cm*.

1. O étant le milieu de [DC], la figure S est formée d'un carré de côté 2 et d'un demi disque de rayon 1.

$$A_S = 2\times 2+\frac{1}{2}\times\pi\times 1^2 = 4+\frac{\pi}{2}$$

2. *x* désigne la distance parcourue par le point M depuis son départ de A et *A*(*x*) est l'aire de la surface balayée par le segment [OM] pendant le déplacement de M.

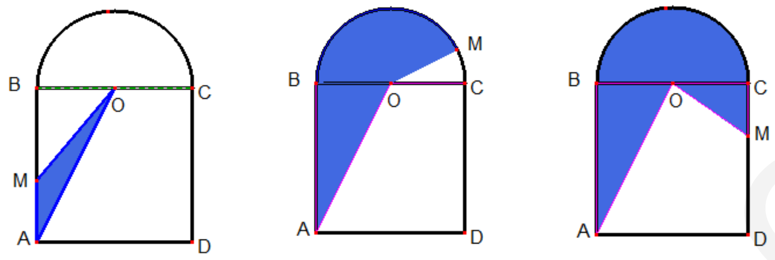


Fig. a. Fig. b Fig. c

a. *M appartient au segment [AB]*

Le triangle AOM a pour base [AM] et pour hauteur [OB]. Son aire est égale à $A(x) = \frac{AM\times OB}{2} = \frac{x\times 1}{2} = \frac{x}{2}$

b. *M appartient au demi-cercle d'extrémités B et C.*

La surface balayée est alors composée du triangle rectangle AOB, d'aire $A_{AOB} = \frac{2\times 1}{2} = 1$, et du secteur

circulaire déterminé par l'arc $\overset{\frown}{BM}$. Pour calculer l'aire de ce secteur, on peut utiliser la relation de proportionnalité qui existe entre l'aire du secteur et la longueur de l'arc, égale ici à *x-2*.

Longueur de l'arc $\overset{\frown}{BM}$	$\frac{2\pi\times 1}{2} = \pi$	*x-2*
Aire du secteur	$\frac{\pi\times 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$	$A_{secteur}$

$$A_{secteur} = \frac{(x-2)\times\frac{\pi}{2}}{\pi} = (x-2)\times\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{\pi} = \frac{x-2}{2} = \frac{x}{2}-1 \qquad A(x) = \frac{x}{2}-1+1 = \frac{x}{2}$$

c. *M appartient au segment [CD]*

La surface balayée est alors composée du triangle rectangle AOB et du demi-disque et du triangle OCM.

$$A_{AOB} = 1 \qquad A_{secteur} = \frac{\pi\times 1^2}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad A_{COM} = \frac{CO\times CM}{2} = \frac{CM}{2}$$

$$avec \quad CM = AM-(AB+l_{\overset{\frown}{BC}}) = x-(2+\pi\times 1) = x-2-\pi$$

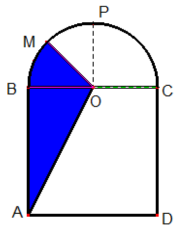
D'où $A(x) = 1+\frac{\pi}{2}+\frac{x-2-\pi}{2} = 1+\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}-\frac{2}{2}-\frac{\pi}{2} = \frac{x}{2}$

3. a. Le point mobile M s'arrête en un point P au moment où l'aire de la surface balayée par le segment [OM] est le quart de l'aire de la surface S.

$\frac{1}{4}A_S = \frac{1}{4}\times(4+\frac{\pi}{2}) = 1+\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{2} = 1+\frac{\pi}{8} = \frac{x}{2}$. D'où $x = 2\times(1+\frac{\pi}{8}) = 2+\frac{\pi}{4}$

b. $x = AB + \overset{\frown}{BM} = 2+\frac{\pi}{4}$ d'où $\overset{\frown}{BM} = \frac{\pi}{4}$.

L'arc $\overset{\frown}{BM}$ représente donc le quart de la longueur du demi-cercle $\overset{\frown}{BC}$.
On peut trouver la position du point M en traçant
la bissectrice de l'angle $\widehat{BOP}$, P étant le milieu
de l'arc $\overset{\frown}{BC}$:



Exercice 5

1. $A_{verte} = 35\%\times S$ et $A_{jaune} = 25\%\times S$ Donc la surface peinte en rouge représente 100-(35+25)= 40% de S.

$40\%\times S = 2688$ $\qquad S = \frac{2688}{0,40} = 6720cm^2$.

2. ABCD est un rectangle ayant pour longueur 1,20m et pour largeur 0,84m. Son aire totale est donc $A_{ABCD} = 120\times 84 = 10080cm^2$.

   L'aire peinte S représente $\frac{6720}{10080}$ de l'aire totale soit environ 66,7% de la surface totale.

3. L'aire de la croix vaut donc : 10080-6720=3360cm^2. Elle peut s'exprimer en fonction de x et y sous la forme $A_{croix} = 84x+120y-xy$, avec ici $x = \frac{1}{8}\times AB = \frac{1}{8}\times 120 = 15cm$. D'où :

   $84x+120y-xy = 84\times 15+120y-15y = 1260+105y = 3360$

   $105y = 3360-1260 \qquad 105y = 2100 \qquad$ y=$\frac{2100}{105} = 20cm$.

4. Dans cette question, la largeur x est égale à 12cm. L'aire de la surface de la croix s'écrit alors

$84\times 12+120y-12y = 1008+108y$

L'aire totale de la toile mesure 10080cm². On souhaite donc que y vérifie :

$0,2\times 10080 \le 1008+108y \le 0,22\times 10080$ *d'où* $2016 \le 1008+108y \le 2217,6$
$1008 \le 108y \le 1209,6$ *et* $9,33 \le y \le 11,2$

Puisque y doit avoir une valeur entière on peut donc choisir y =10cm ou y =11cm.
On peut vérifier que pour y = 10cm, l'aire peinte représente 20,7% de l'aire de la toile. Pour y = 11cm, l'aire peinte en représente 21,8%.