S1C. Autour de la NUMERATION DECIMALE Corrigé.

Mise en route

A. $431 \times 100 + d + u = \overline{431du} = 43125$

B. $15000 < n < 16000$

$\overline{15cdu}$ *avec* $c = 3$ et $d = 4$ *ou* $c = 6$ et $d = 7$ ($c = 9$ *impossible, car d n'est plus un chiffre*)

$u = 6$ *ou* $u = 8$ donc 15346, 15348, 15678

C. Un nombre à trois chiffres s'écrit sous la forme $\overline{cdu}$ (centaine, dizaine, unité), *c, d,* et *u* étant des chiffres, le fait d'avoir trois chiffres impose *c et d* non nul. On peut donc exprimer M, N, P d'une part sous leur écriture : $N = \overline{cdu}$ $\quad$ $M = \overline{cud}$ $\quad$ $P = \overline{dcu}$ $\quad$ *avec* $0 \leq u \leq 9$ $\quad 0 < d \leq 9 \quad 0 < c \leq 9$

D'autre part sous leur décomposition canonique :

$$100c + 10d + u + 36 = 100c + 10u + d \quad et \quad 100c + 10d + u - 270 = 100d + 10c + u$$

La transformation successive de ces égalités permet de trouver des conditions de validité pour les chiffres *c, d, u :*

$$10d + u + 36 = 10u + d \quad et \quad 100c + 10d - 270 = 100d + 10c$$
$$9d - 9u = -36 \quad et \quad 90c - 90d = 270$$
$$d - u = -4 \quad et \quad c - d = 3 \quad \text{soit } d = u - 4 \quad et \quad c = d + 3$$
$$comme\ d > 0, alors\ u - 4 > 0\ donc\ u > 4$$

On trouve alors par essais successifs : 415, 526, 637, 748, 859

Pour s'exercer[1]

Dans tous ces exercices, on pourra écrire un nombre n sous sa forme décimale $\overline{mcdu}$ *ou sous sa décomposition canonique* $\overline{mcdu} = m \times 1000 + c \times 100 + d \times 10 + u$

Exercice 1 ***(****Ecriture et valeur d'un nombre en numération décimale)*

1. Soit n un entier naturel qui s'écrit en base dix avec deux chiffres : $\overline{du}$

Soit d le chiffre des dizaines et u le chiffre des unités $\quad n = 10d + u$ *avec* $1 \leq d \leq 9$ *et* $0 \leq u \leq 9$

Si n est égal au double de la somme de ses chiffres alors $n = 2(d + u)$ d'où $10d + u = 2d + 2u$ *soit* $8d = u$

La seule solution vérifiant toutes les conditions est $u = 8$ *et* $d = 1$, *soit* $n = 18$

2. $n = 10d + u$ *avec* $1 \leq d \leq 9$ *et* $0 \leq u \leq 9$ et $n = d + u$, d'où $10d + u = d + u$ *soit* $9d = 0$

Si *d = 0,* le nombre n est à un chiffre ; il n'y a donc pas de solution.

Exercice 2 *(Numération de position, équation simple et essais)*

$n = \overline{abc}$ *avec* $b = 4c$ *et* $1 \leq a \leq 9$ (pour qu'il y ait trois chiffres), $c \neq 0$ car n non multiple de dix.

[1] (1) D'après Rouen 97-(2) Toulouse 1998-(3) D'après Aix 1999-(4) Nice 2008-(5) Bordeaux 2001-(6) Amiens 2002-(7) Lyon 2005

Le nombre n écrit à l'envers s'écrit $\overline{cba}$ et a pour valeur $\overline{cba} = c \times 100 + b \times 10 + a$

On dit aussi que $\overline{abc}$ $-297 = \overline{cba}$, soit $a \times 100 + b \times 10 + c - 297 = c \times 100 + b \times 10 + a$

$$99a - 99c - 297 = 0 \qquad a - c - 3 = 0 \textit{ soit } a - c = 3$$

Comme $b = 4c$, on ne peut choisir pour c que la valeur 1 ou la valeur 2.

$Si\ c = 1$, alors $a = 4\ et\ b = 4$ d'où $n = 441$. $Si\ c = 2$, alors $a = 5\ et\ b = 8$ d' où $n = 582$

Exercice 3 *(Numération de position, équation simple ou essais)*

1. Un nombre s'écrivant avec trois chiffres et ayant 4 pour chiffre des centaines s'écrit $\overline{4du}$

$\overline{4du} = 26 \times \overline{du}$ $\qquad 400 + d \times 10 + u = 26(d \times 10 + u)$ $\qquad 400 + 10d + u = 260d + 26u$

$250d + 25u = 400$ $\qquad 10d + u = 16$. Cette égalité est la décomposition canonique du nombre $\overline{du} = 16$

On trouve donc 416.

2. $\overline{cdu} = 26 \times \overline{du}$ $\qquad \mathrm{c} \times 100 + d \times 10 + u = 26(d \times 10 + u)$ $\qquad \mathrm{c} \times 100 + 10d + u = 260d + 26u$

$100c = 250d + 25u$ soit $4c = 10d + u = \overline{du}$. Ce nombre à deux chiffres est donc un multiple de 4, c prenant ses valeurs entre 0 et 9. On peut donc choisir c entre 3 et 9, d'où les solutions possibles :312, 416, 520, 624, 728, 832, 936.

Exercice 4 *(Ecriture et dénombrement)*

On cherche tous les nombres entiers naturels de cinq chiffres vérifiant les deux conditions suivantes :

- leur écriture décimale n'utilise que deux chiffres différents
- la somme de leurs cinq chiffres est égale à 11.

1. Pour trouver les nombres à 5 chiffres composés de 1 et de 3 et vérifiant ces conditions, on peut chercher comment décomposer 11 en somme et produit de 1 et de 3. On trouve ainsi que seul $3 \times 3 + 2 \times 1 = 11$; on peut donc utiliser trois 3 et deux 1. Soit dix possibilités :

33311 33131 33113 31331 31133 31313 11333 13133 13313 13331

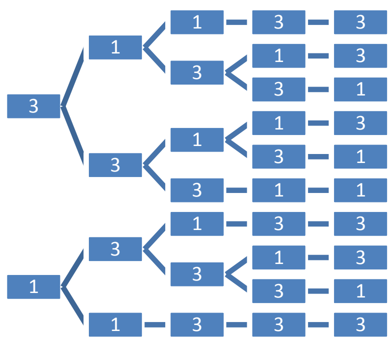
2. De la même façon, on trouve les autres paires de chiffres possibles en décomposant 11 :

$11 = 1 + 1 + 1 + 1 + 7 = 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 4 + 4 + 1 + 1 + 1$

Avec un 7 et quatre 1, il y a 5 possibilités, le 7 pouvant occuper 5 places différentes

Avec un 3 et quatre 2, il y a aussi 5 possibilités.

Avec deux 1 et trois 3, il y a dix possibilités qu'on peut obtenir en faisant un arbre de choix :



Avec deux 4 et trois 1, il y a aussi dix possibilités

3. On trouve donc en tout **30** nombres.

Exercice 5 *(Ecriture et valeur d'un nombre, système d'équations simples ou essai)*

Le nombre cherché peut s'écrire $\overline{cdu}$, puis une fois retourné $\overline{udc}$. On sait que :

$\overline{cdu}$ - $\overline{udc}$ $=100c+10d+u-(100u+10d+c)=$ $99c-99u=297$, avec $c+d+u=11$ *et* $3\times c+2\times d=22$.

Les trois chiffres c, d, u sont donc solutions du système[2] : $\begin{cases} c-u=3 \\ c+d+u=11 \\ 3c+2d=22 \end{cases}$

On peut exprimer *u* en fonction de *c* dans l'équation (3) et le reporter dans l'équation (1).

$\begin{cases} u=c-3 \\ c+d+c-3=11 \\ 3c+2d=22 \end{cases}$ $\begin{cases} u=c-3 \\ 2c+d=14 \\ 3c+2d=22 \end{cases}$ $\begin{cases} u=c-3 \\ d=14-2c \\ 3c+2(14-2c)=22 \end{cases}$ $\begin{cases} u=c-3 \\ d=14-2c \\ c=6 \end{cases}$ $\begin{cases} u=3 \\ d=2 \\ c=6 \end{cases}$

Il y a donc une seule solution, le nombre 623. Pour trouver ce nombre, on peut aussi étudier les différents cas possibles à partir de l'égalité $c=u+3$.

Exercice 6 *(Ecriture et valeur d'un nombre, multiples)*

Soit $N=\overline{mcdu}$ un nombre entier naturel écrit en base dix pour lequel $m>c>d>u>0$.

1. Le plus petit nombre *N* possible : 4321

2. Le plus grand nombre *N* possible : 9876

3. 6543 6542 6541 6532 6531 6521 6432 6431 6421 6321

4. $N'=\overline{udcm}=$ $1000u+100d+10c+m$

$D=\overline{mcdu}-\overline{udcm}=1000m+100c+10d+u-(1000u+100d+10c+m)=999(m-u)+90(c-d)$

5. $D=999(m-u)+90(c-d)=9\times111(m-u)+9\times10(c-d)=9\times k$ *avec* $k=111(m-u)+10(c-d)$

k est un entier donc D est un multiple de 9.

6. D a une valeur maximale quand les écarts *m – u* et *c – d* sont maximum.

Dans ce cas, la valeur maximale de *m* est 9 et la valeur minimale de *u* est 1 ; la valeur maximale de *c* est alors 8, et la valeur minimale de *d* est 2. On obtient alors : $D=999\times8+90\times6=8532$ *pour* $N=9821$

7. D a une valeur minimale quand les écarts *m – u* et *c – d* sont minimum. Dans ce cas, l'écart entre *m et u* est de 3, et l'écart entre *c et d* est de 1. D'où une valeur pour D : $D=999\times3+90\times1=3087$. Cette fois on peut choisir deux chiffres consécutifs pour *c et d* ; on aura alors m et c consécutifs , et d et u consécutifs : N peut valoir : 9876, 8765, 7654, 6543, 5432, 4321

Exercice 7 *(Dénombrement, pourcentage)*

---

[2] Voir fiche S5 Calcul Algébrique

1. Les entiers naturels s'écrivant avec 2 chiffres sont ceux compris entre 10 et 99. Il y en a 90 (10 entiers commençant par le chiffre 1, 10 entiers commençant par le chiffre 2, ..., 10 commençant par 9).
Les entiers naturels s'écrivant avec 3 chiffres sont ceux compris entre 100 et 999. Il y en a 900 (100 entiers commençant par 1, 100 entiers commençant par 2, ..., 100 commençant par 9).
De même, les entiers naturels s'écrivant avec 4 chiffres sont ceux compris entre 1000 et 9999. Il y en a 9000 (1000 entiers commençant par 1, ..., 1000 commençant par 9).
Il y a donc 90 nombres à 2 chiffres, 900 nombres à 3 chiffres et 9000 nombres à 4 chiffres.

2a. Il y a 9 entiers naturels à 3 chiffres dont les trois chiffres sont identiques:
111 ; 222 ; 333 ; 444 ; 555 ; 666 ; 777 ; 888 ; 999.

2b. Pour écrire un nombre à trois chiffres différents, on a 9 choix pour le chiffre des centaines (n'importe quel chiffre sauf 0), puis 9 choix encore pour le chiffre des dizaines (n'importe quel chiffre sauf celui choisi comme chiffre des centaines) et enfin 8 choix pour le chiffre des unités (n'importe quel chiffre sauf ceux choisis pour les centaines et pour les dizaines), d'où : $9 \times 9 \times 8 = 648$
Il y a donc 648 nombres à 3 chiffres tous différents.

2c. Si l'on considère l'ensemble des nombres à trois chiffres, il y en a 900. Parmi ces 900, soit tous les chiffres sont différents (648 nombres), soit tous les chiffres sont identiques (9 nombres), soit l'un des chiffres est répété deux fois ce qui correspond à $900 - 648 - 9 = 243$ cas possibles.
Il y a 243 nombres à trois chiffres dont l'écriture utilise exactement 2 chiffres différents.

2d. Parmi les 900 nombres à trois chiffres, 648 ont tous leurs chiffres différents. Il y en a donc $900 - 648 = 252$ qui ont un chiffre répété, soit en pourcentage : $\frac{252}{900} = 0,28 = 28\%$.