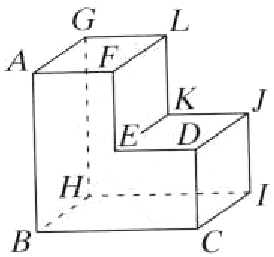
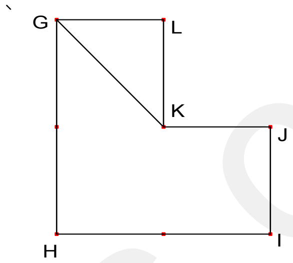
S23C. Autour des CUBES et POLYEDRES
Géométrie dans l'espace

Mise en route

A. Observer : Ce prisme est formé de trois cubes accolés identiques.





- $(BE) \perp (EK)$: Vrai

[EK] est une arête du cube qui est perpendiculaire à la face « avant » (EDC), donc (EK) est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan passant par E, par exemple (BE).

- $(BG) // (CJ)$: Faux

(BG) et (CJ) sont dans deux plans parallèles, car tous deux perpendiculaires à la face « avant » (ABC). Cependant (BG) et (CJ) ne sont pas parallèles car (BG) est la diagonale du rectangle ABHG et (CJ) est la diagonale du carré CDJI. (CJ) serait parallèle à la diagonale du carré BHRS, R et S étant les milieux respectifs de [GH] et [AB]. Or il n'existe qu'une parallèle à (CJ) passant par B.

- $AL = DK$: Vrai

AL et DK sont les longueurs des diagonales des carrés isométriques AGLF et EDJK.

- Les plans (AGL) et (EFK) sont sécants sur la droite (FL) : en effet, les carrés AGLF et EFLK ont en commun l'arête [FL].

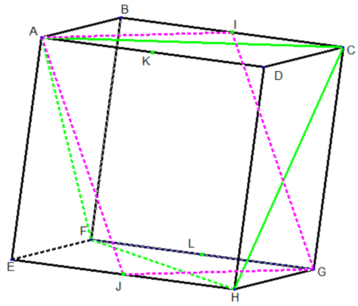
- Le plan (ABH) contient le rectangle ABHG. Le plan (JKL) contient le polygone GHIJKL. Ces deux plans se coupent donc selon la droite (GH).

- On peut commencer par faire la conjecture suivante : Le point d'intersection de la droite (GK) et du plan (CDJ) semble être le point I. Il faut donc démontrer que (GK) passe par I.

Démonstration : Dans la figure ci-dessus, on se place dans le plan (GKJ), c'est à dire la face représentée par le polygone GHIJKL. Les triangles GKL et KIJ sont rectangles isocèles donc leurs angles à la base sont égaux à 45°. L'angle $\widehat{LKJ}$ est droit. On en déduit que l'angle $\widehat{GKI}$ mesure 180°, et que les points G, K, I sont bien alignés.

B. Voir et reconnaître des formes planes dans une représentation en perspective[1]

[1] D'après Aix 2004



On considère le cube ABCDEFGH de côté *4cm*. I, J, K, L sont les milieux respectifs de [BC], [EH], [AD], [FG].

1. Le point D n'appartient pas au segment [IG]. En effet [IG] est dans le plan représenté par le rectangle BCGF, alors que D n'appartient pas à ce plan.

2. $AC = CH = HF = FA$ car ce sont les longueurs des diagonales de carrés isométriques. Dans un plan, un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur est un losange. Cependant ici, les quatre points ne sont pas coplanaires. Par exemple, on peut dire que le point F n'appartient pas au plan (ACH). Le quadrilatère ACHF n'est donc pas un losange.

3*a*. Le quadrilatère AICK est un parallélogramme car les quatre sommets sont dans le plan (ABC) et ses deux côtés [IC] et [AK] sont parallèles et de même longueur. On peut en déduire que les deux autres côtés [IA] et [CK] sont parallèles et de même longueur.

Le quadrilatère CKJG est un parallélogramme car ses deux côtés [CG] et [KJ] sont parallèles (tous deux parallèles à [DH]), donc coplanaires, et de même longueur (tous deux égaux à DH). On peut en déduire que les deux autres côtés [CK] et [GJ] sont parallèles et de même longueur.

Le quadrilatère AIGJ est un parallélogramme car [IA] et [GJ] sont parallèles, tous deux parallèles à [CK], et de la même longueur que CK.

b. Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange. Il suffit donc de prouver que dans le parallélogramme AIGJ, les côtés [AI] et [AJ] sont de même longueur. Or, [AI] et [AJ] sont les hypoténuses respectives des deux triangles rectangles isométriques ABI et AEJ. Elles sont donc égales, et AIGJ est un losange.

*c***.** Un losange qui a un angle droit est un carré. Il faut donc regarder si le losange AIGJ a deux côtés consécutifs perpendiculaires, par exemple [AI] et [AJ]. L'arête [AB] du plan (ABD) est orthogonale à l'arête [AE] et à l'arête [AD]. Elle est donc orthogonale au plan (ADE), donc orthogonale à [AJ], qui est dans ce plan et qui passe par A. Par conséquent le segment [AI] du plan (ABD) n'est pas perpendiculaire à [AJ]. Le losange AIGJ n'est pas un carré.

C. Voir et représenter en vraie grandeur la section d'un cube par un plan

ABCDEFGH est une représentation d'un cube en perspective. I, J, K, L sont les milieux respectifs des arêtes [BC], [EH], [AD], [FG].

☞Construire les sections en vraie grandeur signifie représenter la section à taille réelle quand on coupe le solide par un plan, ce qui revient à construire leur contour de forme polygonale. **La construction se fait uniquement avec les instruments et les reports de longueur, sans calcul.**

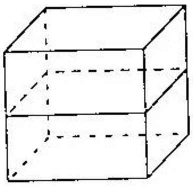


fig.1.

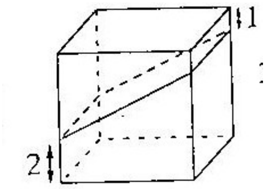


fig.2.

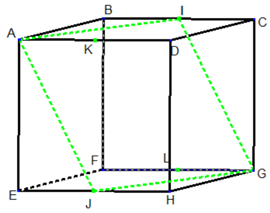


fig.3.

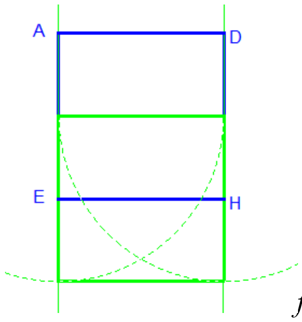


fig.1.

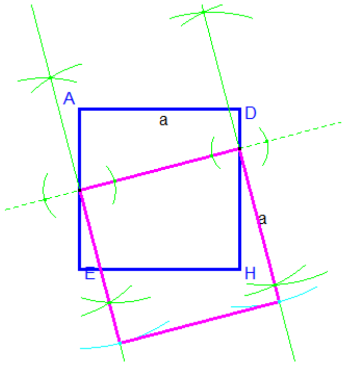


fig. 2

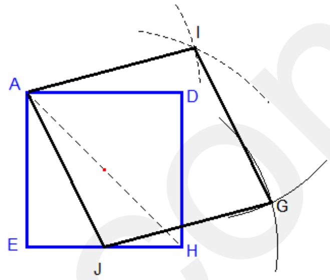


fig.3

La face avant du cube, ADHE, est représentée en bleu sur les figures.

*Fig.*1 : on coupe le cube par un plan parallèle à une des faces du cube. La section est un carré (en vert) de côté *4cm*, comme l'arête du cube.

*Fig.*2 :   la section est un rectangle (en rose) ayant une largeur *a* égale à l'arête du cube, et une longueur représentée par le segment visible sur la face 'avant'. On trace au compas les deux perpendiculaires à ce segment, puis deux arc de cercle de rayon *4cm*.

*Fig.*3 : la section (en noir) est un losange (voir précédemment B.) dont le côté est le segment [AJ] visible sur la face 'avant' de ce cube. Pour trouver le point I, on trace un cercle de centre A de rayon AJ et un cercle de centre J de rayon AH : en effet dans le cube $IJ = CH \ et \ CH = AH \ d'où \ \ IJ = AH$. On termine le losange en traçant un arc de cercle de centre J de rayon AJ, et un arc de cercle de centre I de rayon AJ. On obtient G.

D. Faire des calculs de mesure[2]

I. En sectionnant un coin du cube par un plan, on obtient ce solide.

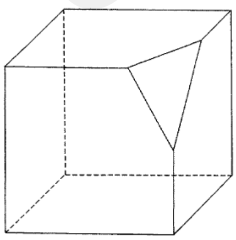


fig1.

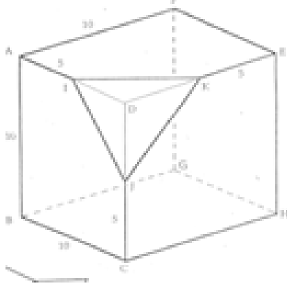


fig2.

1.On découpe ainsi les huit coins du cube, les faces triangulaires ne se touchant pas ni ne se recoupant. On obtient ainsi un solide à 14 faces, les six faces polygonales restantes du cube (octogones) et les huit triangles. D'où $F = 14$.

[2] D'après Rennes 2002

a. Les sommets du polyèdre sont en fait les sommets des triangles ; il comporte donc : $8 \times 3 = 24$ sommets. Les faces du polyèdre comportent huit triangles à trois côtés et 12 segments reliant les sommets des triangles soit $C = 36$ arêtes.

b. $S - C + F = 24 - 36 + 14 = 2$

2. On découpe de la même façon les huit coins du cube de départ par des plans passant par le milieu des arêtes. Le volume total du cube non découpé est égal à : $V = a^3$.

Chaque pyramide découpée est un tétraèdre ayant une de ses arêtes comme hauteur. Ainsi DIJK a pour base DIJ et pour hauteur [DK]. *Il faut changer de vue et ne pas considérer IJK comme base*. Son volume est égal à : $v = \frac{1}{3} \times \frac{DI \times DJ}{2} \times DK = \frac{1}{6} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}$, et le volume des huit tétraèdres est : $v' = 8 \times \frac{a^3}{48} = \frac{a^3}{6}$

Le volume du polyèdre découpé est donc égal à : $V' = V - v' = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{6}$. Ces deux volumes ne sont donc pas égaux.

II.

a. On considère un cube ABCDEFGH, d'arête *4cm*.

b. La pyramide obtenue en joignant le sommet G à chaque sommet du carré ABFE a pour base le carré ABFE et pour hauteur [GF]. L'arête [GF] a donc pour longueur *4cm*. L'arête [GE] est la diagonale du carré EFGH, de côté 4cm. Donc $GE = 4\sqrt{2}cm$, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle EFG. Il en est de même pour l'arête [BG]. L'arête [GA] est la diagonale du cube initial. Elle a pour mesure $GA = 4\sqrt{3}cm$ (d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABG : en effet [AB] est perpendiculaire au plan (BCGF) donc à toutes les droites de ce plan passant par B).

c. Le volume total de la pyramide est égal à :

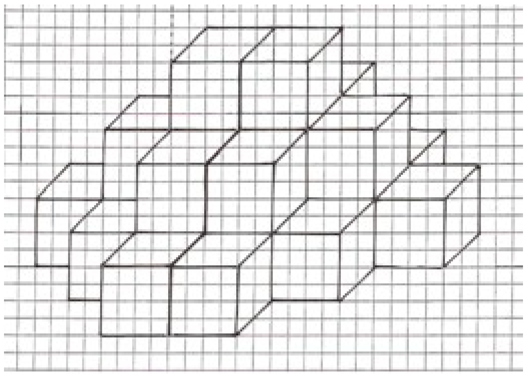
$$V = \frac{1}{3} \times airebase \times hauteur = \frac{1}{3} \times AB^2 \times GF = \frac{1}{3} \times 4^3 = \frac{64}{3} cm^3$$

☞ Dans un carré de côté *a*, le théorème de Pythagore montre que la diagonale a pour mesure $a\sqrt{2}$.

Dans un cube d'arête *a*, le théorème de Pythagore montre que la diagonale a pour mesure $a\sqrt{3}$.

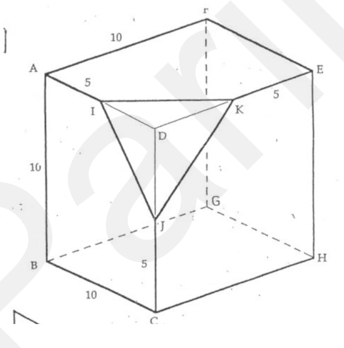
E. Représenter en perspective cavalière

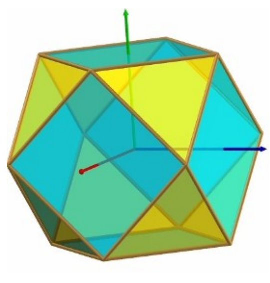
La difficulté pour cette représentation de la figure symétrique par rapport au plan donné, réside dans le fait qu'il faut d'abord se construire une image mentale de cette image puis la représenter en perspective. L'effet « miroir » de la symétrie plane ne fonctionne que de manière conceptuelle et ne peut servir au repérage sur le quadrillage. Celui-ci va seulement aider pour le tracé des cubes empilés.



F. Choisir ou réaliser un patron

· Dans le cube ABCDEFGH, I est le milieu de [AD], J est le milieu de [CD] et K est le milieu de [ED]. Voici le polyèdre, appelé « cuboctaèdre », étudié dans la question précédente. L désigne le milieu de [BC] et M est le milieu de [AB]. La face IJLM est obtenue en joignant les milieux de chaque côté du carré ABCD.
[IJ] et [LM] sont parallèles et de même longueur, car tous deux sont parallèles à [AC] et égaux à la moitié de sa longueur (propriété de la droite des milieux). IJLM est donc un parallélogramme.
Les diagonales [IL] et [JM] du quadrilatère IJLM sont les médianes du carré ABCD et axes de symétrie. Elles sont respectivement parallèles aux côtés du carré ABCD donc perpendiculaires entre elles et de la même longueur que les côtés du carré. Le parallélogramme IJLM a ses diagonales perpendiculaires et égales, c'est donc un carré.



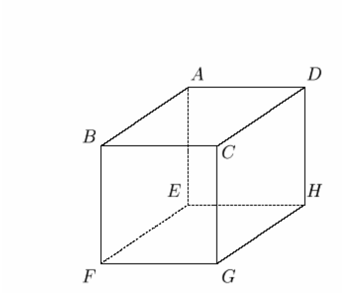


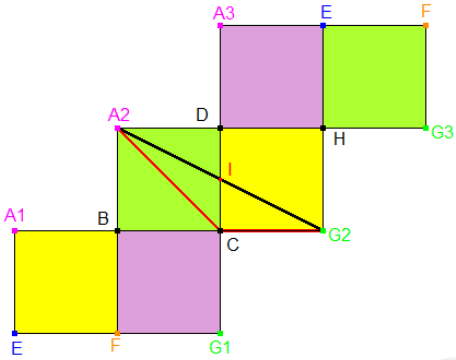
· Pour être un patron de ce cuboctaèdre, le patron doit avoir 14 faces. Ces faces sont huit triangles isométriques et équilatéraux, et six carrés. Le patron 3 comportant 9 triangles, le patron 4 comportant 7 triangles sont donc faux. D'autre part le patron 2 comporte deux carrés 'adjacents', c'est-à-dire ayant une arête commune ce qui n'est pas possible. Le patron 2 est donc faux.

·

G. Passer de la représentation en perspective au patron[3]

1. Le patron est la mise à plat du cube. Chaque sommet du cube appartient à trois faces. On nomme donc A_1, A_2, A_3 le sommet A de chacune des faces.





2*b*. Pour aller de A à G en passant par C, on suit successivement la diagonale [AC] de la face, puis une arête du cube [CG]. On nommera la distance parcourue selon ce chemin l_{AG}. La diagonale d'un carré de côté a a pour longueur $a\sqrt{2}$. $l_{AG} = AC + CG = a\sqrt{2} + a = \sqrt{2} + 1$, puisque le cube a pour arête $a = 1$

3*b*. Nous venons d'étudier un des chemins pour aller de A à G en restant dans les faces ABCD et CDHG, celui passant par C, mais celui-ci n'est peut être pas le plus court. En effet si on observe le patron, le chemin le plus court, visible dans la mise à plat du parcours pour aller de A à G, est la diagonale du rectangle A_2BG_2H. Cette diagonale coupe la médiane [DC] du rectangle en son milieu I, centre de symétrie du rectangle.

D'après le théorème de Pythagore ce chemin a pour longueur $d(A,G) = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

On peut vérifier que $\sqrt{5} < \sqrt{2} + 1$ en élevant au carré chaque membre, chacun étant positif. $(\sqrt{5})^2 < (\sqrt{2}+1)^2$ $\quad 5 < 2 + 1 + 2\sqrt{2}$ $\quad 2 < 2\sqrt{2}$

Sur le dessin en perspective du cube, il faut placer le point I milieu de [DC], et tracer [AI] puis [IG]. *La représentation en perspective cavalière ne respecte pas les longueurs mais elle respecte les rapports de longueur.*

Pour s'exercer[4]

Exercice 1

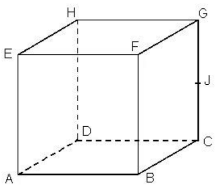


fig.1a

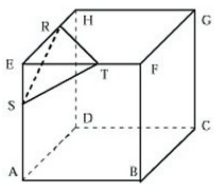


fig.1b

A.

[3] D'après Lyon 2004

[4] D'après Bordeaux 99 ; Aix 2002 ; Corse 1998 ; Bordeaux 2001 *Les patrons et les figures représentés ne respectent pas toujours la bonne échelle.*

Le triangle ... est-il…	rectangle?	isocèle?	équilatéral?
DJH	Non	Oui	Non
ACG	Oui	Non	Non
AFC	Non	Oui	Oui
EHG	Oui	Oui	Non

Le triangle DJH est dans le plan (DCH), c'est-à-dire dans la face CDHG, puisque les trois points D, J, H sont dans ce plan. On raisonne donc comme dans un carré…On peut par exemple dire que le point J, milieu d'un côté, est sur un des axes de symétrie du carré CDHG. Il est donc à égale distance des points H et D. Le triangle HDJ est donc isocèle.

Le triangle ACG appartient au plan (ACG), c'est-à-dire au plan contenant A, qui coupe le cube selon l'arête [GC]. Cette arête est perpendiculaire en C à la face ABCD, donc à toutes les droites de ce plan passant par C, donc à [AC]. Le triangle ACG est donc rectangle. [AC] est la diagonale d'une face du cube, [CG] est l'arête du cube. Ces deux longueurs ne sont donc pas égales et le triangle n'est pas isocèle.

Dans le triangle AFC, [AF], [FC] et [AC] sont les diagonales des faces carrées du cube, elles sont donc de même longueur et le triangle est équilatéral (donc n'est pas rectangle). On peut considérer qu'il est trois fois isocèle.

Le triangle EHG appartient à une des faces du cube. [EH] et [HG] sont deux arêtes consécutives, donc perpendiculaires et de même longueur. Le triangle est donc rectangle isocèle.

B.

2. Puisque le point R est à *6 cm* du sommet E sur l'arête [EH] et le point T à *6 cm* du sommet E sur l'arête [EF], on peut représenter ces points dans un même plan défini par deux droites perpendiculaires[5] en E, représentant les deux arêtes. L'unité *cm* étant précisée, on utilisera la règle graduée pour placer les points R et T à *6cm* du point E. Le cube ayant des faces isométriques, les longueurs ST et SR sont égales. Le triangle RST est isocèle de sommet S. D'autre part, la longueur ST est la même que la longueur S'T obtenue en plaçant S' à *3cm* de E sur [ER]. Le point S est alors à l'intersection du cercle de centre T de rayon TS' et du cercle de centre R de même rayon (*fig.1c*).

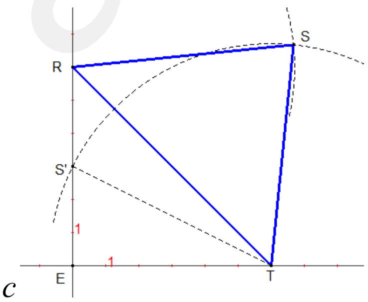


fig.1c

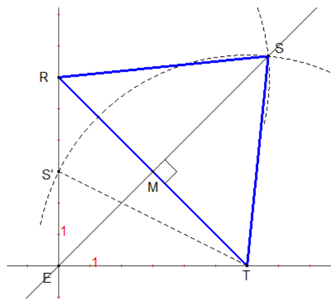


fig.1d

3. Dans le triangle rectangle ERT, d'après le théorème de Pythagore $ER^2 + ET^2 = RT^2$

$RT^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \; d'où \; RT = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}cm$

[5] La construction se fait au compas, l'équerre n'étant pas autorisée.

4. En se plaçant dans le plan de section (RST), l'aire du triangle est égale à $A_{RST} = \frac{1}{2} \times RT \times SM$, M étant le pied de la hauteur issue de S (*fig.1d*). Le triangle RST étant isocèle, la hauteur est aussi médiatrice de la base et M est le milieu de [RT], d'où $MR = 3\sqrt{2}cm$.

Dans le triangle rectangle MSR, d'après le théorème de Pythagore $RS^2 = MR^2 + MS^2$. On en déduit que $MS^2 = RS^2 - MR^2$. Pour calculer RS, on se place dans la face du cube ADHE (*fig. 1b*) où le triangle ERS est rectangle et où $ER = 6cm \; et \; ES = 3cm$. D'après le théorème de Pythagore $RS^2 = ER^2 + ES^2 = 36 + 9 = 45$, soit $RS = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}cm$. On en déduit que $MS^2 = 45 - 18 = 27$, soit $MS = 3\sqrt{3}cm$.

$$A_{RST} = \frac{1}{2} \times RT \times SM = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{6}cm^2$$

Exercice 2

Soit le cube ci-dessous d'arête *a (fig.2a)*. En coupant ce cube suivant le plan (BED) on obtient deux polyèdres. **L'exercice ne concerne que le polyèdre ne contenant pas le sommet A.**

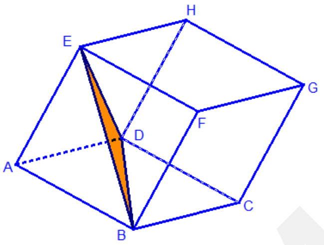


fig.2a

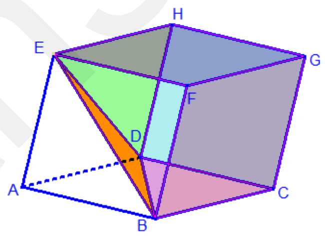


fig.2b

1. Quand on coupe ce cube par le plan (BED), on exclut le sommet A du solide. Le nouveau solide obtenu a donc 7 sommets, B, C, D, E, F, G, H. On obtient d'une part la pyramide BEDA, d'autre part le polyèdre BFGCDHE. Il comprend donc 12 arêtes, les trois arêtes du cube issues de A, [AE], [AB], [AD] étant remplacées par les trois arêtes du triangle BED, [BE], [ED], [BD]. Les autres arêtes sont les arêtes du cube.

2. Ce polyèdre a trois faces carrées BFGC, CDHG, EFGH et quatre faces triangulaires BED, BEF, EDH, BDC. Le triangle BDE (en orange) est équilatéral car chacun de ses côtés est la diagonale d'un carré. Les triangles BDC (en rose), DEH (en vert), BEF (transparent) sont rectangles isocèles car un des angles est droit et deux côtés sont de même longueur (arêtes du cube).

3. Le volume du polyèdre est la différence du volume du cube avec celui du volume de la pyramide enlevée. Le volume du cube d'arête *a* est égal à a^3. Le volume de la pyramide ABDE est égale à :

$$V_{ABDE} = \frac{aire \; de \; la \; base \times \; hauteur}{3} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times AB \times AE}{3} = \frac{1}{6} a \times a \times a = \frac{a^3}{6}$$

On en déduit que le volume du polyèdre vaut : $V = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{6}$

Exercice 3

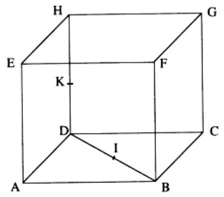


fig.3a

1. L'arête [BC] du cube est perpendiculaire en C à la face CDHG. Elle est donc perpendiculaire à toutes les droites de ce plan passant par C, donc en particulier au segment [HC]. Le triangle HBC est donc rectangle en C.

2. a. De même le triangle HDB est rectangle en D car l'arête [HD] est perpendiculaire à la face ABCD, donc au segment [DB]. [HD] est une arête du cube donc $HD = 6cm$.

[DB] est la diagonale du carré ABCD, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ADB, $DB^2 = AD^2 + AB^2 = 6^2 + 6^2 = 72$, d'où $DB = 6\sqrt{2}cm$. Dans le triangle HDB, d'après le théorème de Pythagore $HB^2 = DB^2 + HD^2 = 72 + 36 = 108$. On en déduit que $HB = 6\sqrt{3}cm$.

b. Dans le triangle HDB, K est le milieu de [HD] et I est le milieu de [DB]. Le segment qui joint le milieu de deux côtés est parallèle au troisième côté, et a pour longueur la moitié de ce côté. On en déduit que (KI) est parallèle à (HB) et que $KI = \dfrac{HB}{2} = 3\sqrt{3}cm$.

c. Programme de construction[6] pour construire le triangle HDB en vraie grandeur (*fig.3b*) :

- Tracer un carré ABCD, de *6cm* de côté.
- Tracer la diagonale [DB] de la face carré ABCD.
- Tracer la droite perpendiculaire à [DB] passant par D
- Tracer un arc de cercle de centre D de rayon *6cm*. Il coupe cette droite en H.
- Tracer le triangle HDB.

3. a. La pyramide de sommet H ayant pour base le triangle BCD a quatre faces triangulaires. L'arête [HD] du cube est perpendiculaire au carré ABCD, donc est sa hauteur. Le triangle BCD est rectangle et isocèle en C, ses côtés adjacents à l'angle droit mesurant *6cm*. Le triangle HDC (H_1DC) est rectangle en C et isocèle avec $HD = DC = 6cm$. Le triangle HDB (H_2DB) est rectangle en D avec $DB = 6\sqrt{2}cm$ (diagonale du carré ABCD) et $HD = 6cm$. Enfin le triangle HBC (H_3BC) est rectangle en C avec $BC=6cm$ et $HC = 6\sqrt{2}cm$ (diagonale du carré). A l'échelle 1/2, toutes les longueurs sont divisées par 2, les angles gardant leur mesure.

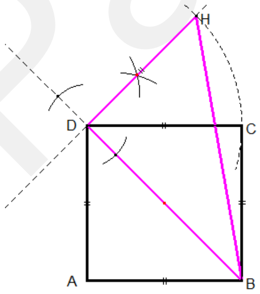


fig.3b

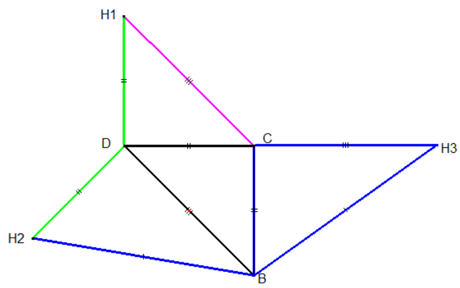


fig. 3c

b. Le volume de la pyramide est égale à $V_{HBCD} = \dfrac{1}{3} \times A_{BCD} \times HD = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times DC \times BC \times 6 = \dfrac{1}{6} \times 6^3 = 36cm^3$.

[6] Un programme de construction est un film des différentes étapes nécessaires à la construction.