S2C. Autour des BASES DE NUMERATION Corrigé

Mise en route

A. Une écriture en base dix signifie que les unités sont groupées par paquets de 10, et qu'à chaque rang de numération on échange un groupement de dix pour un groupement de rang supérieur (10 dizaines pour 1 centaine). Pour écrire un nombre en base trois, il faut faire des groupements de trois unités puis échanger trois paquets de trois unités contre 1 paquet de rang supérieur (9) …etc. Ainsi 5 puis 10 unités se décomposent en $5=1\times3+2$ *ou* $10=1\times3^2+1$; d'où les écritures $\overline{12}^3$ ou $\overline{101}^3$ en base trois.

Base dix	3	5	10	11	13	28	845
Base trois	$\overline{10}^3$	$\overline{12}^3$	$\overline{101}^3$	$\overline{102}^3$	$\overline{111}^3$	$\overline{1001}^3$	$\overline{1011022}^3$
Base cinq	$\overline{3}^5$	$\overline{10}^5$	$\overline{20}^5$	$\overline{21}^5$	$\overline{23}^5$	$\overline{103}^5$	$\overline{11340}^5$

Quand on doit chercher l'écriture de plusieurs nombres dans une base donnée on peut gagner du temps en cherchant les différentes puissances de la base, puis en décomposant le nombre selon ces puissances. Ainsi :
$28=27+1=3^3+1=1\times3^3+1\times3^0$ et $845=729+81+27+6+2$

	3^7=2187	3^6=729	3^5=243	3^4=81	3^3=27	3^2=9	3^1=3	3^0
10						1	0	1
28					1	0	0	1
845		1	0	1	1	0	2	2

B. $\overline{23}^4=2\times4+3=11$ $\overline{10}^5=1\times5+0=5$ $\overline{1000}^2=1\times2^3=8$ $\overline{143}^7=1\times7^2+4\times7^1+3=80$

C. Vrai ou faux ?

Faux : $\overline{567}^8$ est le nombre $5\times8^2+6\times8^1+7\times8^0=375$. Il ne faut pas confondre les groupements en base 8 c'est-à-dire 8^1, 8^2… avec 8 centaines, 8dizaines…

Faux : $\overline{10111}^2$ est le nombre $1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0=23$ en base 10. Le nombre $\overline{10111}^2$ s'écrit avec cinq chiffres mais le premier rang à droite est 2^0.

Faux : $452=90\times5+2=18\times5^2+2=(3\times5+3)\times5^2+2=3\times5^3+3\times5^2+2=\overline{3302}^5$. Attention de ne pas oublier le rang 5^1qui ne comporte pas de groupement donc indiqué par un « 0 » dans l'écriture du nombre.

D. Numérations anciennes[1]

[1] *Source : http://pedagogie.ac-montpellier.fr/Disciplines/maths/pedago/college/stage_0506/villeneuve.pdf*

Récapitulatif des symboles utilisés dans les numérations égyptienne et sino-japonaise.

𓏺 bâton	𓎆 anse	𓍢 corde	𓆼 fleur de Lotus	𓂭 index
1	10	100	1 000	10 000

𓂭 index	𓆐 têtard	𓁨 dieu
10 000	100 000	1 000 000

一	二	三	四	五	六	七
1	2	3	4	5	6	7
八	九	十	百	千	万	
8	9	10	100	1000	10 000	

Numération	Quelle est la base ?	Le zéro existe-t-il ?	La position des chiffres a-t-elle une importance ?	Quelles opérations faisaient-ils pour trouver la valeur du nombre ?
égyptienne	**dix** dix "𓏺" s'écrivent "𓎆" ; dix "𓎆" s'écrivent "𓍢" ; etc.	**NON** pour écrire 102, les égyptiens écrivaient 𓍢𓏺𓏺, soit 1 centaine + 2 unités.	**NON** 𓎆𓏺 ou 𓏺𓎆, c'est 1 dizaine + 1 unité, soit 11.	**des additions** 𓍢𓍢𓏺𓏺𓏺𓏺 c'est 100+100+1+1+1+1, soit 204
romaine	**dix et cinq** cinq "**I**" s'écrivent "**V**" ; dix "**I**" s'écrivent "**X**" ; etc.	**NON** pour écrire 203, les romains écrivaient **CCIII**, soit 2 centaines + 3 unités.	**OUI** **IX** c'est 9 ; **XI** c'est 11	**des additions et des soustractions** **XXXIV**, c'est 10+10+10+(5-1), soit 34
arabe	**dix** dix unités, c'est une dizaine ; dix dizaines, c'est une centaine etc.	**OUI** 207, c'est 2 centaines + 0 dizaine + 7 unités.	**OUI** 12 ≠ 21	**des multiplications et des additions** 308, c'est 3×100+0×10+8×1
japonaise	**dix** dix "一" s'écrivent "十" ; dix "十" s'écrivent "百" ; etc.	**NON** pour écrire 308, les japonais écrivent 三百八, soit 3 centaines + 8 unités.	**OUI** 二十六 c'est 26 ; 六十二 c'est 62	**des multiplications et des additions** 三百八 c'est 3×100+8, soit 308

1/ Le nombre 𓏺𓏺𓍢 ne s'écrit pas **200** mais **102** (100+2) en numération arabe ; **200** s'écrit 𓍢 𓍢. On peut noter que **102** peut aussi s'écrire 𓍢 𓏺𓏺

2/ Le nombre **320** s'écrit bien 𓍢 𓍢 𓍢 𓎆𓎆, quelque soit la position des symboles (100+100+100+10+10)

3/ Le nombre 𓏺𓏺𓏺𓍢𓎆𓎆𓆼 ne s'écrit pas **312 000** mais **1123** (1000+ 100+10+10+1+1+1) en numération arabe.

4/ Le nombre 𓏺𓏺𓏺𓍢𓆼 s'écrit bien **1103** (1000+100+1+1+1)

5/ Le nombre **199** ne s'écrit pas **CIC** en numération romaine ; **199** s'écrit **CXCIX** (100 -10+100 -1+10)

Les symboles qui ne sont pas en valeur décroissante sont soustractifs[2]. En principe, bien que ces règles n'aient pas toujours été respectées, seuls les puissances de dix sont concernées (I, X, C). On ne soustrait qu'un seul symbole à chaque fois (pour 8, on écrit VIII et non IIX), et on ne soustrait pas de symboles plus de dix fois supérieure (pour 1999, on n'écrit pas IMM ou encore MIM mais on écrit MCMXCIX)

[2] http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Numerati/Romain

6/ Le nombre **240** ne s'écrit pas **IICIVX** mais **CCXL** en numération romaine (100+100 -10+50)

7/ Le nombre 二十 ne s'écrit pas 210 mais **20** (2×10) en numération arabe.

8/ Le nombre **25** ne s'écrit pas 十十百 . Il s'écrit 二十五, $(2\times10+5)$.

9/ Le nombre 三千八 s'écrit bien **3008** en numération arabe $(3\times1000+8)$. Le deuxième symbole représente 1000 et non 10.

Pour s'exercer[3]

Exercice 1

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$\overline{11}^n$	$1\times2+1=3$	$1\times3+1=4$	$1\times4+1=5$	$1\times5+1=6$
$\overline{111}^n$	$1\times2^2+1\times2+1=7$	$1\times3^2+1\times3+1=13$	21	31

2. $n^2+n+1=73$ $\quad n^2+n=72$ $\quad n(n+1)=72$ $\quad$ *l'équation est vérifiée pour* $n=8$

3. $(n+1)^2-(n^2+n+1)=5$ $\quad n^2+2n+1-n^2-n-1=5$ $\quad n=5$

4. L'équation s'écrit $(n+1)^2-(n^2+n+1)=n$ soit en développant $n=n$. L'équation est vérifiée pour tout n, on ne peut donc pas conclure sur la base.

Exercice 2

1. $\overline{113}^a=\overline{21}^a+\overline{32}^a$ permet d'écrire que $1\times a^2+1\times a+3=(2a+1)+(3a+2)$ *avec* $a>3$ compte tenu des chiffres utilisés dans l'écriture des nombres, soit :

$a^2+a+3=5a+3$ $\quad a(a-4)=0$ $\quad a=4$ *car* $a>0$.

On peut alors vérifier qu'on a bien $\overline{113}^4=\overline{21}^4+\overline{32}^4$

2. $\overline{26}^b+\overline{12}^b=\overline{43}^b$

On sait compte tenu des chiffres utilisés que b > 6 (on ne peut avoir en base 5 un chiffre des unités égal à 6)

$(2b+6)+(b+2)=(4b+3)$ soit $b=5$, qui est donc impossible. Aucune base ne convient.

Exercice 3

[3] Ex2. Montpellier 94 - Ex3. Montpellier 97 - 5. D'après Montpellier 98

1. Dans une base donnée, le plus grand des nombres s'écrivant avec deux chiffres s'obtient en prenant à chaque rang la plus grande valeur possible.

Le nombre cherché s'écrit donc $\overline{77}^{8}$ en base huit qui vaut 63 en base dix : $7\times8^1 + 7\times8^0 = 63$

2. Quand la base dépasse dix, nous n'avons plus assez de symboles chiffres, aussi nous utiliserons des symboles lettres. Soit β le plus grand chiffre de la base douze (β représente le mot-nombre onze), le nombre cherché s'écrit $\overline{\beta\beta}^{12}$ en base douze qui vaut 143 en base dix :

$\overline{\beta\beta}^{12} = \beta\times12^1 + \beta\times12^0 = 11\times12+11\times1=143$

On peut aussi raisonner sur le successeur de $\overline{\beta\beta}^{12}$ qui serait $\overline{100}^{12}$ et dont la valeur est 12² soit 144 en base dix. On en déduit la valeur 143 de $\overline{\beta\beta}^{12}$.

3a. Le plus grand chiffre utilisé dans la base n est n - 1, le nombre cherché vaut :

$\overline{(n-1)(n-1)}^{n} = (n-1)\times n^1 + (n-1)\times n^0 = n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$

3b. 224 est le plus grand des nombres s'écrivant avec deux chiffres en base quinze car, d'après la question précédente, $224 = 225 - 1 = 15^2 - 1$. Sa décomposition en base 15 est $14\times15+14=224$.

Par ailleurs, pour n < 15, on constate que 14² = 196, 13² = 169 …ce qui signifie qu il y aura un terme de rang supérieur, donc trois chiffres dans l'écriture de ce nombre. $n = 15$ est donc bien le plus petit entier pour lequel 224 s'écrit avec deux chiffres en base n.

Exercice 4

1. $144=12^2=1\times12^2+0\times12^1+0\times12^0=\overline{100}^{12}$

2. $\overline{1000}^{12}=1\times12^3=1728$.

3. Les symboles utilisés en base douze sont : 0, 1, 2, …, 9, α (**10**), β (**11**)

L'écriture $\overline{\alpha\beta}^{12}$ représente le nombre écrit en base douze avec les deux symboles α (le 11ème) et β (le 12ème).

Sa valeur en base dix est alors $\overline{\alpha\beta}^{12}=10\times12^1+11\times12^0=131$.

L'écriture $\overline{\alpha}^{12}\times\overline{\beta}^{12}$ représente le produit de $\overline{\alpha}^{12}$ par $\overline{\beta}^{12}$ chacun étant écrit en base douze. En remplaçant chacun des nombres dans le produit par sa valeur en base dix, on obtient $\overline{\alpha}^{12}\times\overline{\beta}^{12}=10\times11=110$.

Remarque : en effectuant les multiplications successives de $\overline{\alpha}^{12}$ par 1, 2, ... jusqu'à $\overline{\beta}^{12}$, on obtient successivement :

$\overline{\alpha}^{12}\times2=\overline{\alpha}^{12}+\overline{\alpha}^{12}=\overline{18}^{12}$ $\qquad$ $\overline{\alpha}^{12}\times3=\overline{\alpha}^{12}+\overline{\alpha}^{12}+\overline{\alpha}^{12}=\overline{26}^{12}$

A chaque fois on ajoute "dix"unités(α),donc on peut ajouter une "douzaine"et enlever deux unités.

$\overline{34}^{12},\overline{42}^{12},\overline{50}^{12},\overline{5\alpha}^{12},\overline{68}^{12},\overline{76}^{12},\overline{84}^{12},\overline{92}^{12}$. Attention au passage $\overline{50}^{12},\overline{5\alpha}^{12}$

Le dernier résultat représente le produit cherché en base douze . On retrouve bien $\overline{92}^{12}=9\times12+2=110$

Exercice 5

On nous montre que $8391 = 2\times3600 + 19\times60 + 51$.

1. L'écriture sexagésimale (3) (0) (17) (48) représente le nombre qui se décompose en base 60 sous la forme $3\times60^3 + 0\times60^2 + 17\times60^1 + 48$, soit 649 068 en base dix.

2. Le nombre qui s'écrit 54 325 432 en base dix se décompose en base soixante sous la forme $4\times60^4 + 11\times60^3 + 30\times60^2 + 23\times60^1 + 52$; cette décomposition s'obtient en faisant les divisions successives par les puissances de 60. Le nombre s'écrit donc (4) (11) (30) (23) (52) en écriture sexagésimale.