S5C. Autour du CALCUL ALGEBRIQUE Corrigé

Mise en route

A. *Le passage à l'écriture algébrique va permettre de démontrer que cette propriété est toujours vraie.*

Magie : soit a votre âge $(a + 2)(a - 2) + 5 - a^2 = a^2 - 4 + 5 - a^2 = 1$

B. *La résolution d'équation s'appuie sur les propriétés des égalités.*

Dans chacun des quatre cas, on note m la masse d'une poire. Pour les quatre pesées, les balances sont en équilibre : les masses contenues dans chacun des plateaux sont donc égales. On peut donc écrire :

1) $m + 62 = 336$, donc $m = 336 - 62 = 274$. Une poire pèse 274g. (Vérification : $274 + 62 = 336$)

2) $3m = 642$, donc $m = \frac{642}{3} = 214$. Une poire pèse 214 g. (Vérification $3 \times 214 = 642$)

3) $3m + 152 = 797$ donc $3m = 797-152 = 645$, donc $m = \frac{645}{3} = 215$. Une poire pèse 215 g.

   Vérification : $3 \times 215 + 152 = 797$

4) $5m + 45 = 3m + 405$ donc $5m - 3m = 405-45$ donc $2m = 360$, donc $m = 180$. Une poire pèse 180 g.

   (Vérification : $5 \times 180 + 45 = 945$ et $3 \times 180 + 405 = 945$)

C. Schéma 1 : $12x = 18 \times (x-7)$, donc $12x = 18x - 126$, donc $18x - 12x = 126$, donc $6x = 126$, donc

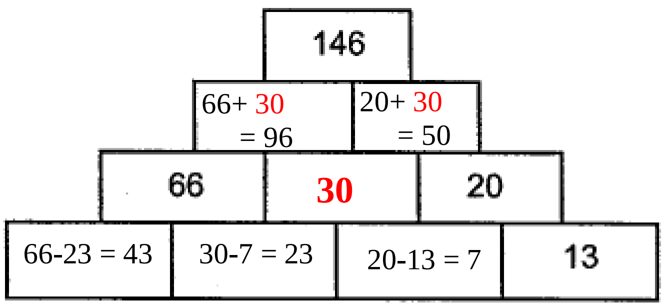
$x = \frac{126}{6} = 21$. Vérification : $12 \times 21 = 252$; $18 \times (21-7) = 18 \times 14 = 252$)

Schéma 2 : $3x + 15 = 2x$, donc $x = -15$.

Vérification : $3 \times (-15) + 15 = -45 + 15 = -30$, et $2 \times (-15) = -30$.

D. On note x le nombre le nombre manquant au 2ème niveau (en partant du bas). Au niveau supérieur, les nombres manquants sont donc respectivement : $66 + x$ et $20 + x$.

x vérifie donc l'équation $(66 + x) + (20 + x) = 146$, soit $2x = 146 - 86 = 60$, soit $x = 30$. On peut alors remplir le mur :



Pour s'exercer[1]

Exercice 1 *Une équation peut avoir une solution dans certains ensembles et ne pas en avoir dans d'autres.*

- $2\,a = 1$, soit $a = \frac{1}{2}$; l'équation n'a pas de solution entière, mais elle a une solution réelle : $a=\frac{1}{2}$
- $3a+5=1$ est équivalente à $3\,a = 1 - 5 = -4$, soit $a = -\frac{4}{3}$; l'équation n'a pas de solution entière, et elle a une solution réelle : $a=-\frac{4}{3}$ (vérification : on a bien $3\times\left(-\frac{4}{3}\right)+5= 5 - 4 =1$).
- $5\,(4a+5) = 2\,(4+10a)$ est équivalente à $20\,a + 25 = 8 + 20\,a$, soit $25 =8$, qui est faux. L'équation n'a donc pas de solution.
- $9(4a+8)=12(6+3a)$ est équivalente à $36a+72=72+36a$. Cette équation est toujours vérifiée ; elle a une infinité de solutions dans l'ensemble des naturels et dans l'ensemble des réels.

Exercice 2 *Il n'est pas utile de résoudre une équation (inéquation) pour savoir si une valeur donnée de x est solution de cette équation (inéquation) . Il suffit de remplacer x par la valeur proposée et regarder si l'égalité (inégalité) est vérifiée.*

- $\frac{0+3}{4}-\frac{0-1}{6}=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$; 0 n'est donc pas solution de l'équation proposée.
- $(4 \times 0 - 5)^2 = (-5)^2 = 25$; 0 n'est pas solution.
- $2\times0-5\leq3\times0-2$ l'inéquation est vérifiée pour $x = 0$ car $-5\leq-2$ (puisque $-5<-2$)

Exercice 3

$11+x=-13$ $x=-13-11$ $x=-24$	$\frac{1}{2}-x=\frac{7}{4}$ $-x=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}$ $-x=\frac{5}{4}$ $\quad x=-\frac{5}{4}$	$6x=-40$ $x=-\frac{40}{6}=-\frac{20}{3}$	$4-3x=16$ $-3x=16-4$ $-3x=12$ $x=-4$	$12x-5=-3x+7$ $12x+3x=7+5$ $15x=12$ $x=\frac{12}{15}$ $\quad x=\frac{4}{5}$	$5(x+7)=2(3-2x)$ $5x+35=6-4x$ $5x+4x=-35+6$ $9x=-29$ $x=-\frac{29}{9}$

Exercice 4

$7x-5< 3x+2(x+5)$ $7x-5<3x+2x+10$ $2x<15$ $x<7{,}5$ $S=\left]-\infty\,;7{,}5\right[$	$4(x+2)\leq 6x-5$ $4x+8\leq6x-5$ $-2x\leq-13$ $2x\geq13$ $x\geq6{,}5$ $S=\left[6{,}5;+\infty\right[$	Les solutions du système $\begin{cases}7x-5<3x+2(x+5)\\4(x+2)\leq 6x-5\end{cases}$ sont les valeurs de x simultanément solutions des deux inéquations, soient $6{,}5\leq x<7{,}5$. D'où : $S=\left[6{,}5;7{,}5\right[$ **Il y a donc une seule solution entière qui est 7.**

---

[1] [1] D. Reims 200, 5. D'après Reims 2004, 7. Dijon 2000, 10. Groupe2 2007, 12. 12 Groupe 6 2007

Exercice 5

1) Pour trouver le nombre de départ il faut remonter les étapes

$$0 \xrightarrow{\text{Multiplier par } 2} 0 \xrightarrow{\text{Ajouter } 20} 20 \xrightarrow{\text{Diviser par } 4} 5 \xrightarrow{\text{Retrancher } 2} \boxed{3}$$

Pour trouver 0, le nombre initial est 3.

2) $\boxed{x} \xrightarrow{\text{Ajouter } 2} x+2 \xrightarrow{\text{Multiplier par } 4} 4(x+2) \xrightarrow{\text{Retrancher } 20} 4x-12 \xrightarrow{\text{Diviser par } 2} 2x-6$

3) Un nombre x ressort inchangé si et seulement si x = 2x - 6 soit x = 6.

4) Avec la nouvelle machine, le nombre obtenu en sortie est égal à $a\times(2x-6)+b=x$. Si l'on veut que tout nombre x soit inchangé, on doit avoir $2ax-6a+b=x$, soit $x\underbrace{(2a-1)}_{1}\underbrace{-6a+b}_{0}=0$. Cette égalité est vérifiée pour tout x en choisissant $2a=1$ *et* $-6a+b=0$, soit $a=\frac{1}{2}$ *et* $b=3$.

Exercice 6

La première équation est du premier degré, elle se résout en réduisant au même dénominateur, ou en transposant puis en appliquant la propriété $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\times d=b\times c\ (\text{avec } b\neq 0 \text{ et } d\neq 0)$ (égalité des produits en croix)

Prudence sur les deux équations suivantes qu'il ne faut pas confondre : la première $(x-3)-(5-2x)=0$ est du premier degré, et se résout en développant le premier membre ; la seconde $(x-3)(5-2x)=0$ est un produit du second degré et se résout sans développer en appliquant la propriété que vous avez appris par cœur au collège « un produit est nul si et seulement si un des deux facteurs est nul » !

La dernière équation n'est pas une équation produit, il faut donc factoriser le premier membre pour pouvoir appliquer cette propriété.

$\frac{x+4}{3}-\frac{2x+5}{4}=0$ $\frac{4(x+4)}{12}-\frac{3(2x+5)}{12}=0$ $4x+16-(6x+15)=0$ $4x+16-6x-15=0$ $2x=1 \quad x=\frac{1}{2}$ $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$	$(x-3)-(5-2x)=0$ $x-3-5+2x=0$ $3x-8=0 \quad x=\frac{8}{3}$ $S=\left\{\frac{8}{3}\right\}$	$\underbrace{(x-3)(5-2x)}_{PRODUIT}=\underbrace{0}_{NUL}$ *Soit* $x-3=0$ *Soit* $5-2x=0$ $x=3$ *ou* $x=\frac{5}{2}$ $S=\left\{3;\frac{5}{2}\right\}$	$\underbrace{(x+3)(4x-5)+5(x+3)}_{SOMME}=0$ $\underbrace{(x+3)(4x-5+5)}_{PRODUIT}=\underbrace{0}_{NUL}$ $(x+3)(4x)=0$ *Soit* $x+3=0$, *soit* $4x=0$ *Deux solutions* $x=-3$ *ou* $x=0$ S={-3;0}

Exercice 7

La résolution arithmétique (accessible à l'école) va s'appuyer sur une représentation schématisée du problème et/ou sur le calcul numérique. La résolution algébrique (accessible au collège) impose de passer par la mise en équation du problème, avec le choix d'une inconnue.

1. *Résolution algébrique :* si x désigne le nombre de fois où Pinocchio a dit la vérité, à la fin de la journée, on peut écrire : $5+7\times 3-2x=20$ *soit* $x=\dfrac{(5+7\times 3-20)}{2}=3$, soit trois vérités.

Résolution arithmétique : $7\times 3=21\ cm$ $\quad 5\ cm+21\ cm=26\ cm$ $\quad 26\ cm-20\ cm=6\ cm$

Après 7 mensonges, le nez de Pinocchio s'est allongé de 21 cm ; il mesure alors 26 cm. A la fin de la journée, le nez de Pinocchio ne mesure plus que 20 cm, donc il a perdu 6 cm pendant la journée. Pour perdre 6 cm, il faut dire 3 vérités ($3\times 2\ cm=6\ cm$ *ou* $2cm+2cm+2cm=6cm$)

2. Le matin, au réveil, le nez de Pinocchio a 5cm de long. En fin de journée, le nez de Pinocchio mesure 5cm. Le nombre de mensonges et de vérités se sont donc compensés, chacun étant compris entre 1 et 15. On constate que deux mensonges ont le même effet sur le nez que trois vérités (6cm), mais si Pinocchio dit un nombre impair de mensonges (1,3, 5…), il ne pourra être compensé par des vérités dont l'effet est toujours un multiple de 2 ! Le nombre de mensonges est donc pair. D'où cinq solutions : 2 mensonges et 3 vérités, 4 mensonges et 6 vérités, 6 mensonges et 9 vérités, 8 mensonges et 12 vérités, 10 mensonges et 15 vérités.

Exercice 8

a. Pour savoir si 5 est solution de l'équation, il n'est pas nécessaire de la résoudre. En remplaçant x par 5, on voit que $5^2-10\times 5+25=0$ donc 5 est solution ; on pouvait aussi remarquer ici que $x^2-10x+25=(x-5)^2$.

b. Pour trouver y tel que $y^2-6y+9=0$, on peut reconnaître une identité remarquable dans le premier membre, d'où $(y-3)^2=0$, et une solution « double » $y=3$.

c. L'équation $x^2-3x+2=0$ étant du second degré, elle a 0, 1 ou 2 solutions.

On peut chercher s'il existe une solution « évidente », c'est-à-dire simple à trouver. Par essais, on trouve que 1 est solution ($1^2-3\times 1+2=0$). L'équation n'admet pas de solution double puisque le premier membre ne s'écrit pas sous forme d'un carré. Elle a donc une deuxième solution.

Il existe une propriété (vu au lycée) énonçant que si x = 1 est solution, on peut mettre $x-1$ en facteur, soit $x^2-3x+2=(x-1)(ax+b)=(x-1)(x-2)$. *Pour trouver le second facteur* $(x-2)$ *, on travaille par identification, lors du développement : ainsi le terme* x^2 *ne peut venir que du produit de x par x, donc a=1. Le terme numérique +2 ne peut venir que du produit de -2 par -1soit b=-2.*

L'équation est maintenant sous la forme d'un produit nul $(x-1)(x-2)=0$; elle a donc deux solutions 1 et 2.

On peut aussi trouver cette deuxième solution par essais successifs, en remplaçant x par 0, -1, $\boxed{2}$

Exercice 9

La résolution d'équation du second degré s'appuie sur la factorisation et les identités remarquables. La méthode experte n'est pas au programme du CRPE.

$\underbrace{x^2 - 49}_{a^2-b^2} = 0$ $(x-7)(x+7) = 0$ *soit* $x-7=0$ *soit* $x+7=0$ *d'où* $x=7$ *ou* $x=-7$ $S=\{-7,7\}$	$(x+4)^2 = 36$ $\underbrace{(x+4)^2 - 6^2}_{a^2-b^2}=0$ $(x+4-6)(x+4+6)=0$ $(x-2)(x+10)=0$ *soit* $x-2=0$, *soit* $x+10=0$ *d'où* $x=2$ *ou* $x=-10$ $S=\{2,-10\}$	$x^2 = 25x$ $\underbrace{x^2-25x}_{\text{facteur commun } x}=0$ $x(x-25)=0$ *soit* $x=0$ *soit* $x-25=0$ *Donc deux solutions* $x=0$ *ou* $x=25$ $S=\{0;25\}$
$x^2 = 6x - 9$ $\underbrace{x^2-6x+9}_{(a-b)^2}=0$ $(x-3)^2=0$ *une solution double* $x=3$ $S=\{3\}$	$x^2+4x+4 = 16$ $(x+2)^2=16$ $\underbrace{(x+2)^2-16}_{a^2-b^2}=0$ $(x+2-4)(x+2+4)=0$ $(x-2)(x+6)=0$ *soit* $x-2=0$ *soit* $x+6=0$ *deux solutions* $x=2$ *ou* $x=-6$ $S=\{2,-6\}$	$9x^2 = 8$ $\underbrace{9x^2-8}_{a^2-b^2}=0$ $\underbrace{(3x-\sqrt{8})(3x+\sqrt{8})}_{(a+b)(a-b)}=0$ *soit* $3x-\sqrt{8}=0$ *soit* $3x+\sqrt{8}=0$ *deux solutions* $x=\frac{\sqrt{8}}{3}$ *ou* $x=-\frac{\sqrt{8}}{3}$ $S=\left\{\frac{\sqrt{8}}{3},-\frac{\sqrt{8}}{3}\right\}$

Exercice 10

Résolution algébrique : Soit f le nombre de flans vendus et t le nombre de parts de tartes vendues. On peut donc écrire $f+t=72$. D'autre part les flans ont rapporté $1,50\times f$ et les tartes $2\times t$; d'où une recette totale de $1,50\times f+2\times t=122$. On obtient alors le système : $\begin{cases} f+t=72 \\ 1,50f+2t=122 \end{cases}$

La première équation permet d'écrire $f=72-t$, et de « substituer » f par cette expression en fonction de t dans la seconde équation :

$$\begin{cases} f=72-t \\ 1,50(72-t)+2t=122 \end{cases} \quad \begin{cases} f=72-t \\ 108-1,5t+2t=122 \end{cases} \quad \begin{cases} f=72-t \\ 108+0,5t=122 \end{cases} \quad \begin{cases} f=72-t \\ 0,5t=14 \end{cases} \quad \begin{cases} f=72-t \\ t=14:0,5=28 \end{cases}$$

On a donc vendu 28 parts de tartes et 44 flans pâtissiers (72-28).

Résolution arithmétique : on peut par essais successifs trouver le nombre de chaque pâtisserie vendue, une feuille de calcul sur tableur permet d'obtenir très rapidement ces résultats.

On peut par exemple démarrer d'un nombre de parts égal, soit 36 :

S5CClasseur1

	A	B	C	D	E
1	f	t	f+t	recette	
2	36	36	72	126	
3	37	35	72	125,5	
4	38	34	72	125	
5	39	33	72	124,5	
6	40	32	72	124	
7	41	31	72	123,5	
8	42	30	72	123	
9	43	29	72	122,5	
10	44	28	72	122	
11					

On peut aussi se dire que si on n'avait vendu que des flans, on aurait gagné 72 x 1,5=108 €; donc pour obtenir 122€, on doit « *gagner* » 14€ en plus en vendant des tartes. L'écart de prix à l'unité étant de 0,50€, il faut donc vendre 14 x 0,50=28, soit 28 tartes et 44 flans.

2. Jean Marc prend $\frac{1}{3}$ de la tarte, il en reste $\frac{2}{3}$. Sophie prend les $\frac{3}{8}$ de $\frac{2}{3}$, soit $\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, il reste alors $1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$. Antoine et Rémi prennent donc chacun la moitié de $\frac{5}{12}$, soit $\frac{5}{24}$.

Exercice 11

L'équation $2x+3y=18$ admet une infinité de solutions représentées par les couples (x, y) pour lesquels l'égalité est vérifiée. Par exemple (0, 6) ; (9,0) ; (3, 4) sont des couples solutions.

Chaque couple représente les coordonnées d'un point situé sur une droite (d). On dira $2x+3y=18$ est l'équation de la droite (d) (*cf . fonctions linéaires et affines*).

$\begin{cases} y=24-x \\ 40x+35y=910 \end{cases}$ $\begin{cases} y=24-x \\ 40x+35(24-x)=910 \end{cases}$ $\begin{cases} y=24-x \\ 5x=70 \end{cases}$ $\begin{cases} x=14 \\ y=10 \end{cases}$ $S=\{(14,10)\}$	$\begin{cases} 5x+3y=20,5 \\ 4x+4y=22 \end{cases}$ $\begin{cases} 20x+12y=82 \\ 20x+20y=110 \end{cases}$ $\begin{cases} 8y=28 \\ 4x+4y=22 \end{cases}$ $\begin{cases} y=3,5 \\ x=2 \end{cases}$ $S=\{(2;3,5)\}$	$\begin{cases} 2x+3y=18 \\ x+4y=19 \end{cases}$ $\begin{cases} 2(19-4y)+3y=18 \\ x=19-4y \end{cases}$ $\begin{cases} -5y=-20 \\ x=19-4y \end{cases}$ $\begin{cases} y=4 \\ x=3 \end{cases}$ $S=\{(3,4)\}$
On peut vérifier que : $10=24-14$ $et\ \ 40\times14+35\times10=910$	On peut vérifier que : $5\times2+3\times3,5=20,5$ et $4\times2+4\times3,5=22$	On peut vérifier que : $2\times3+3\times4=18$ $et\ 3+4\times4=19$

Exercice 12

2. Soient x, y, z les trois nombres et leurs sommes $x+y, y+z, x+z$. On a donc : $\begin{cases} x+y=78 & (1) \\ y+z=59 & (2) \\ x+z=43 & (3) \end{cases}$

On peut résoudre ce système de différentes façons. Par exemple en soustrayant l'équation (1) et l'équation (2) membre à membre, on obtient une nouvelle équation $x-z=19$ (4)

D'où le nouveau système :

$$\begin{cases} x+y=78 \\ x-z=19 & (4) \\ x+z=43 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre l'équation (4) et l'équation (3) on obtient $2x=62$.

Le système s'écrit alors $\begin{cases} x+y=78 \\ 2x=62 \\ x+z=43 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y=47 \\ x=31 \\ z=12 \end{cases}$ Les trois nombres sont 12, 31, 47.