S7C. Autour des MULTIPLES ET DIVISEURS Corrigé

Mise en route

A. Vrai ou faux ?

- **Faux** : Il suffit d'un contre-exemple pour le montrer
  Le nombre 3 lui-même est multiple de 3, mais n'est pas multiple de 9. On peut trouver d'autres contre exemples, par exemple, le nombre 12 est multiple de 3 et pas multiple de 9.
- **Vrai :** nous la démontrons dans le cas général
  Un nombre divisible par 4 s'écrit $4 \times k$, où k est un entier naturel. Il s'écrit aussi $2 \times 2 \times k$, il est donc divisible par 2.
- **Faux :** Utilisons à nouveau un contre-exemple : 10 est divisible par 2, mais n'est pas divisible par 4.
- **Faux** : Tout nombre premier est divisible seulement par 1 et par lui-même. 2 est un nombre dont les seuls diviseurs sont 1 et lui-même, donc il est premier ; pourtant 2 est un nombre pair.
- **Faux** : en effet, 2 et 7 sont des nombres premiers, mais 2 + 7 = 9 n'est pas un nombre premier.
- **Vrai :** si a est un entier pair alors a est le double d'un autre entier p et peut s'écrire $2p$. Son carré est donc égal à $4p^2$ qui est le double de $2p^2$. Or $2p^2$ est aussi un entier. On peut en déduire que $4p^2$, autrement dit a^2, est aussi un entier pair.

Remarque : Un exemple suffit à montrer qu'une proposition est fausse; on parle dans ce cas de contre-exemple. Mais un exemple ou plusieurs exemples ne prouvent pas qu'une proposition soit vraie.

B.a. Le chiffre des unités de 36054 est pair, donc 36054 est un multiple de 2. De plus, la somme des chiffres de 36054 est égale à 18, qui est un multiple de 9, donc 36054 est aussi un multiple de 9. Les nombres 2 et 9 sont premiers entre eux* donc 36054 est un multiple de $9 \times 2 = 18$.

*Deux nombres premiers entre eux sont des nombres qui n'ont pour seul diviseur commun que 1.

b. 4 et 9 sont premiers entre eux donc le nombre cherché est un multiple de 36. On va le trouver en construisant une partie du répertoire des multiples de 36 :

$36 \times 10 = 360$ $\quad 36 \times 20 = 720$ $\quad 36 \times 30 = 1080$ $\quad 36 \times 29 = 1044$ $\quad 36 \times 28 = 1008$ $\quad 36 \times 31 = 1116$

Le nombre cherché est 1116, car c'est le plus petit multiple à quatre chiffres, tous différents de zéro.

C. L'arête a du cube doit être un diviseur à la fois de 180, de 150 et de 90.

$180 = 2 \times 9 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$150 = 3 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2$

$90 = 3^2 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2$

Les boites étant aussi grandes que possible, a est le PGCD* de ces trois nombres : $a = 2 \times 3 \times 5 = 30$

*Le PGCD de plusieurs nombres est le Plus Grand Diviseur Commun à ces nombres.

On pourra alors mettre 6 boites dans une dimension, 5 dans la deuxième et 3 dans la troisième ; on placera donc $6\times5\times3$ soit 90 boites de 30cm d'arête.

D. a. $38+7+7+7...=38+7k$ $\quad 365-38=327 \quad 327=7\times46+5 \quad 38+7\times46=360$

Le dernier nombre nommé est donc 360, et on a nommé 47 nombres.

b. On peut remplacer 365 par 364, 363, 362, 361 et aussi 366 (en effet, en comptant une fois de plus 7, on arrive à 367).

Pour s'exercer[1]

Exercice 1

a. Les nombres inférieurs à 10 qui possèdent exactement 3 diviseurs sont 4 (multiple de 1, 2 et 4) et 9 (multiple de 1, 3 et 9).

b. Un nombre N admettant exactement trois diviseurs, admet à fortiori 1 et lui-même. Si ce nombre N admet un autre diviseur *a*, N se décompose en un produit de la forme $a\times b$, et *b* serait un quatrième diviseur de N, sauf si $a=b$. On va donc rechercher un nombre égal au carré d'un nombre premier, car, dans ce cas, les seuls diviseurs sont 1, le nombre premier dont il est le carré, et lui-même. On examine alors les carrés des nombres premiers s'écrivant sous la forme d'un nombre à trois chiffres et on observe la somme des chiffres de N.

p	11	13	17	19	23	27	29
$N=p^2$	121	169	289	361	529	729	**841**
Somme	4	17	19	10	16	18	13

Le nombre cherché (on sait qu'il est unique) est donc 841.

Exercice 2

a. 1025 se termine par 5 et est multiple de 5. $3{,}6\times10^2=360$, $0\times106=0$, $19\times106=19000000$ se terminent par 0 et sont donc multiples de 5. $312\times100=312$; $40120\times10^{-1}=4012$ ne le sont pas.

b. $A=2\times3^4\times3\times15=2\times3^5\times3\times5 = 2\times3^6\times5$ et $B=(3\times2\times5)^3=3^3\times2^3\times5^3$

A se divise par $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ et B se divise par $3^0, 3^1, 3^2, 3^3$.

Exercice 3

Si N est divisible par 6 et 45, cela veut dire aussi qu'il est divisible par 2, par 3, par 9, par 5. Sachant qu'il est divisible par 2 et 5, il est divisible par 10 et se termine par 0.

La somme de ces chiffres, égale à $20+a$ doit être un multiple de 9 ; on trouve donc $a=7$ *et* $N=727830$.

Exercice 4

[1] Amiens 2003 - Besançon 2004 – Créteil 2004 – Nouvelle-Calédonie 2004 – Aix 2005 – Besançon 2005 – Amiens 2005 --Nancy 2002 --La Réunion 2005 --Aix 2006

a. Pour trouver tous les diviseurs de 72, on peut décomposer 72 successivement en produit de deux facteurs : $72 = 1\times 72 = 2\times 36 = 3\times 24 = 4\times 18 = 6\times 12 = 8\times 9$ jusqu'à retrouver le même produit. Chacun des facteurs est alors un diviseur. Les diviseurs de 72 sont : $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 18,\ 24,\ 36,\ 72\ \}$

b. On cherche x pour que $x(x+1)(2x) = 72$ ce qu'on peut écrire sous la forme $2\times x\times x\times(x+1)$. Une décomposition de 72 est : $72 = 8\times 9 = 2\times 3\times 3\times 4$ ce qui, en observant permet de trouver que $x = 3$.
On peut aussi écrire l'équation sous la forme $x^2(x+1) = 36$. Or $36 = 9\times 4 = 3^2\times(3+1)$ *d'où* $x = 3$.

Exercice 5

a. Vrai : si le nombre à quatre chiffres *8b76* est un multiple de 3, alors la somme de ses chiffres est elle aussi un multiple de trois (critère de divisibilité par trois) donc $8+b+7+6 = b+21$ est un multiple de 3 que nous nommerons 3*k*. La valeur du chiffre *b* s'exprime alors par l'égalité $b = 3k - 21 = 3(k-7)$ qui montre que *b* est aussi un multiple de 3. En fait, la différence entre deux multiples de trois est toujours un multiple de trois.

b. Vrai : pour montrer que le produit de trois nombres entiers consécutifs est divisible par 24, on va montrer qu'il est en fait multiple à la fois de 3 et de 8 ; 3 et 8 étant premiers entre eux, il sera multiple de 24.

D'une part, le produit de trois nombres entiers consécutifs contient forcément un entier qui est multiple de3; quelques exemples nous aident à le conjecturer : ainsi 6, 7, 8, ou 19, 20, 21 ou encore, 11, 12, 13, …on remarque ainsi que :

- soit le premier entier est un multiple de trois, et l'affirmation est vérifiée.
- soit le premier entier n'est pas un multiple de trois et a un reste égal à 1 dans la division par trois; dans ce cas le nombre entier suivant a, dans cette division, un reste égal à 2, et le dernier nombre a un reste égal à 0 ; ce dernier est donc un multiple de 3 ce qui vérifie l'affirmation précédente.
- soit le premier entier n'est pas multiple de trois et a un reste égal à 2 quand on le divise par trois, dans ce cas le nombre entier suivant a un reste égal à 0, donc ce nombre est un multiple de 3 ce qui vérifie l'affirmation précédente.

Il n'y a pas d'autres cas possibles car dans la division euclidienne d'un entier par 3, le reste ne peut être égal qu'à 0, 1 ou 2. Le produit de trois entiers consécutifs est donc toujours divisible par 3 car il contient toujours un facteur qui est lui-même divisible par trois.

D'autre part, le produit de ces trois nombres entiers consécutifs se présente ici sous la forme $pair\text{ - }impair\text{ - }pair$ soit $P = 2p(2p+1)\ (2p+2) = 2p\ (2p+1)\times 2(p+1) = 4p(p+1)(2p+1)$

C'est donc un multiple de 4. D'autre part, le produit de *p* par *(p+1)* est à fortiori pair, puisque l'un des deux nombres est pair. Il s'écrit donc *2k* , et $P = 8k(2p+1)$. C'est donc un multiple de 8.

On peut donc déduire des deux conclusions précédentes que le produit de trois entiers consécutifs dont le premier est un entier pair est divisible par 24.

Exercice 6

L'entier *c* étant le plus grand des trois nombres, il désigne la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle. D'après le théorème de Pythagore, on peut écrire $c^2 = a^2 + b^2$. Deux cas sont alors possibles :

• *a* ou *b* est pair : dans ce cas-là, la proposition est vérifiée, au moins l'un des trois nombres est pair.

• *a et b* sont impairs : dans ce cas là, il existe deux entiers *k* et *k'* tels que $a = 2k+1$ *et* $b = 2k'+1$.

Alors $c^2 = (2k+1)^2 + (2k'+1)^2 = 4\,k^2 + 4\,(k')^2 + 4\,k + 4\,k' + 2$ qui est un multiple de 2, donc pair. Il reste à montrer que si c^2 est pair, alors *c* l'est aussi.

Si *c* n'était pas pair, alors il s'écrirait $c = 2k+1$ et $c^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ serait aussi impair, ce qui n'est pas le cas. On en déduit donc que c^2 pair implique *c* pair.

La proposition est donc toujours vérifiée.

Exercice 7

Tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges et toutes les billes rouges sont utilisées : le nombre de paquets est donc un diviseur du nombre de billes rouges. Idem pour les billes noires. Le nombre de paquets est donc un diviseur commun à 108 et 135. De plus, on s'intéresse ici au nombre maximal de paquets que l'on peut réaliser : on cherche donc le plus grand diviseur commun à 108 et 135.

Pour cela, on écrit la décomposition en facteurs premiers de 108 et 135 :

$108 = 2^2 \times 27 = 2^2 \times 3^3$; $135 = 5 \times 27 = 5 \times 3^3$. Le PGCD de 108 et 135 est donc 3^3, c'est-à-dire 27.

On peut donc réaliser au maximum 27 paquets.

Puisque $108 = 4 \times 27$ *et* $135 = 5 \times 27$, chaque paquet contient 4 billes rouges et 5 billes noires.

Exercice 8

a. La décomposition en produit de facteurs premiers du PGCD des deux nombres est $18 = 2 \times 3^2$

Les deux nombres cherchés sont donc des multiples de 2×3^2. Leur décomposition est donc de la forme A= $2 \times 3^2 \times k$ et B= $2 \times 3^2 \times k'$, *k et k'* étant premiers entre eux.

La décomposition en produit de facteurs premiers du PPCM des deux nombres est $648 = 2^3 \times 3^4$

Cela signifie d'une part qu'aucun autre facteur n'apparaît dans *k* et *k'* (sinon il apparaitrait dans la décomposition du PPCM), et d'autre part que *k* et *k'* ne comportent pas de facteurs 2 ou 3 supplémentaires simultanément (sinon l'exposant de 2 ou de 3 serait plus grand dans le PGCD). La décomposition des deux nombres A et B cherchées est donc de la forme $2^m \times 3^P$ avec $1 \leq m \leq 3$ et $2 \leq p \leq 4$.

$Si\ m = 1,\ A = 2 \times 3^2,\ alors\ B = 2^3 \times 3^4.$ Les deux nombres cherchés sont 18 et 648.

$Si\ m = 3,\ A = 2^3 \times 3^2, alors\ B = 2 \times 3^4.$ Les deux nombres cherchés sont 72 et 162.

On remarque que ce sont les deux seules valeurs qui permettent de respecter simultanément les deux contraintes du PGCD et du PPCM.

b. $4125 = 5^3 \times 3 \times 11$ *et* $2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$

Le PGCD de deux nombres est le produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions, accompagnés de leur plus petit exposant.

Le PPCM des deux nombres est le produit de tous les facteurs qui interviennent dans les décompositions des deux nombres, accompagnés de leur plus grand exposant.

Le PGCD des deux nombres est donc $3\times5^2=75$, et le PPCM est $2^2\times3^3\times5^3\times11=148500$

Le produit du PGCD et du PPCM est : $2^2\times3^4\times5^5\times11$

Le produit des deux nombres est : $2^2\times3^4\times5^5\times11$

On remarque que ces deux nombres sont égaux. On peut démontrer que ce résultat est toujours vrai.

Exercice 9

N est divisible par 6, donc par 2 et par 3, il existe donc les facteurs 2 et 3 dans la décomposition en facteurs premiers. Ainsi $N=\ 2^a\times3^b\times m$, où *m* est un nombre entier qui n'est multiple ni de 2, ni de 3. En revanche, *N* n'est pas divisible par $8=2^3$, donc *a=1* ou *a=2*.

On rappelle que si la décomposition d'un nombre en facteurs premiers est de la forme $A^aB^bC^c$*..., alors le nombre de ses diviseurs est (a+1) (b+1) (c+1).* Le nombre de diviseurs de *N* est donc divisible par *(a+1).* Or on sait qu'il est égal à 15, donc le cas *a=1* est impossible, car 15 n'est pas divisible par 2.

Par conséquent *a = 2*. Comme $15=3\times5=(2+1)(4+1)$, on en déduit que *b=4*. D'où $N=2^23^4=324$**.**

Exercice 10

1. L'associé de 768 492 s'obtient en intercalant un 0 entre le chiffre des dizaines 9 et le chiffre des unités 2, c'est donc 7 684 902.

2. On peut dire que 2005 est l'associé de 205.

3. a. On suppose que *n* est un entier divisible par 9. On sait alors que la somme des chiffres de *n* est un nombre divisible par 9. Or, intercaler un 0 entre deux de ses chiffres ne change rien à leur somme, donc la somme des chiffres de son associé est aussi divisible par 9. L'associé de *n* est donc divisible par 9.

b. La réciproque de la propriété démontrée précédemment est: « Si l'associé d'un entier *n* est un nombre divisible par 9, alors *n* est divisible par 9 ».

c. Cette réciproque est vraie : Si l'associé d'un entier *n* est un nombre divisible par 9, alors la somme de ses chiffres est divisible par 9. Comme la somme de ses chiffres est égale à la somme des chiffres de *n,* alors *n* est aussi divisible par 9.

4. *Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (critère de divisibilité par 4).* L'associé de *n* doit donc vérifier cette propriété. Or son dernier chiffre (les unités) est le même que celui de *n*, et son chiffres des dizaines est 0. L'associé de *n* est donc divisible par 4 s'il se termine par 0 (00), 4 (04) ou 8 (08). Cette condition est nécessaire et suffisante car sa réciproque est vraie.

5. Tout nombre *n* peut se décomposer sous la forme $n=10\times k+u$, *u* étant son chiffres des unités .

Le reste de la division de *n* par 5 est donc le même que le reste de la division de *u* par 5, $10\times k$ étant un multiple de 5. D'autre part la division euclidienne de *n* par 5 peut s'écrire $n=5\times q+r$ avec $r<5$.

On conclut donc que, si $0\le u<5$, alors *u* est le reste de cette division. Si $5\le \mathrm{u}\le9$, alors $r=u-5$ (le quotient devient q+1). D'autre part l'associé de *n* peut se décomposer sous la forme $100\times k+u$. Son reste dans la division par 5 est donc le même que celui de *n*, selon la valeur du chiffre des unités *u*.

Exercice 11

1. L'égalité qui caractérise la division euclidienne de 1001 par 11est : 1001 = 91× 11 avec q = 91 et r = 0

2. $1001\times m+99\times c+11\times d-m+c-d+u=1000\times m+100\times c+10\times d+u=\overline{mcdu}$

3a. $\overline{mcdu}=91\times 11\times m+9\times 11\times c+11\times d-m+c-d+u=11\times(91m+9c+d)-m+c-d+u$

D'une part, $11\times(91m+9c+d)$ est un multiple de 11. D'autre part $-m+c-d+u=c+u-(m+d)$

$avec\ 0<m\leq 9,\ 0\leq c\leq 9,\ 0\leq d\leq 9,\ 0\leq u\leq 9$, donc ce nombre est inférieur ou égal à 17.

Pour que $\overline{mcdu}$ soit un multiple de 11, il faut et il suffit que $c+u-(m+d)$ soit un multiple de 11 c'est à dire dans ce cas, égal à 0 ou 11.

On peut énoncer: "pour qu'un nombre à quatre chiffres soit un multiple de 11, il faut et il suffit que la différence entre la somme des chiffres de rang pair (le chiffre des unités représente le rang 0) et la somme des chiffres de rang impair soit multiple de 11".

3b. Un tel nombre s'écrit $\overline{38ab}$. S'il est divisible par 11 on a $(8+b)-(3+a)=11$ *ou* $(8+b)-(3+a)=0$

$(8+b)-(3+a)=5+b-a$, avec a et b vérifiant $0\leq a\leq 9$ et $0\leq b\leq 9$

Soit $5+b-a=11$ alors $b=a+6$ donc a est égal à 0, 1, 2 ou 3

Soit $5+b-a=0$ alors $b=a-5$ donc a est égal à 5, 6, 7, 8, 9

a	0	1	2	3	5	6	7	8	9
b	6	7	8	9	0	1	2	3	4
$\overline{38ab}$	3806	3817	3828	3839	3850	3861	3872	3883	3894

4a. $\overline{abmcdu}=100000\times a+10000\times b+1000\times m+100\times c+10\times d+u$
$=100001\times a+9999\times b+1001\times m+999\times c+11\times d-a+b-m+c-d+u$

D'une part $100001\times a+9999\times b+1001\times m+999\times c+11\times d$ est un multiple de 11.

En effet : $100001\times a+9999\times b+1001\times m+99\times c+11\times d=11\times(9091a+909b+91m+9c+1d)$

D'autre part $-a+b-m+c-d+u=(b+c+u)-(a+m+d)$

On peut donc énoncer que, pour que $\overline{abmcdu}$ soit un multiple de 11, il faut et il suffit que $(b+c+u)-(a+m+d)$ soit un multiple de 11. Ce nombre sera inférieur à 26, c'est-à-dire égal à 0, 11 ou 22.

On dira que la différence entre la somme des chiffres de rang pair (rang 0, 2, 4) et la somme des chiffres de rang impair (rang 1, 3, 5) doit être égale à 0, 11 ou 22.

4 b. $1{,}2452\times 10^{11}=124520\times 10^{-5}\times 10^{11}=124520\times 10^{6}$

On calcule la différence entre la somme des chiffres de rang pair (rang 0 pour le chiffre des unités) et la somme des chiffres de rang impair $(0+5+2)-(2+4+1)=0$.

Puisque ce résultat est multiple de 11, alors 124520 est multiple de 11 et donc que $1{,}2452\times 10^{11}$ l'est aussi.

On peut d'ailleurs le vérifier $1{,}2452\times 10^{11}=124520\times 10^{6}=11\times 11320\times 10^{6}$