S8C. Autour de la DIVISION EUCLIDIENNE Corrigé

Mise en route

A. Faux : si a et q sont deux nombres entiers naturels, l'égalité $a=13\times q+18$ ne montre pas que q est le quotient euclidien de a par 13, car un reste, non nul, est toujours inférieur au diviseur. Donc 18 ne peut pas être le reste. En divisant a par 13, « *il y va une fois de plus* » et la division euclidienne s'écrirait $a=13(q+1)+5$, le reste serait alors 5.

Là encore, 4560 étant supérieur au diviseur 3748, la division euclidienne s'écrira en fait :
$36202744=9659\times3748+812$. Le quotient est 9659 et le reste 812.

B. *Résultat 1* : l'ordre de grandeur du quotient n'est pas bon, car $348\times12+8$ est de l'ordre de $350\times10=3500$, donc de l'ordre des milliers, et non des dizaines de milliers comme 40626.

Résultat 2 : le reste de la division euclidienne doit être inférieur au diviseur, or $18>12$.

Résultat 3 : le chiffre des unités n'est pas correct : en effet, le chiffre des unités de $3382\times12+6$ est celui de $2\times2+6$, c'est-à-dire 0, qui est différent de 6 (chiffre des unités de 40626).

Résultat 4 : un reste nul signifierait que le dividende 40626 est multiple de 12, donc en particulier de 4. Or, grâce au critère de divisibilité par 4, on sait que 40626 n'est pas multiple de 4 (car 26 ne l'est pas).

C. 1. On peut utiliser le signe de division $\div$ que l'on trouve sur les calculatrices : en tapant 73956 divisé par 13 sur une calculatrice, on obtient par exemple 5 688,923077 (le nombre de chiffres après la virgule dépend de l'option 'nombre de décimales' choisi). Les touches « mémoire » permettent de mémoriser 73956 et le produit 5688×13. Le calcul $743956-5688\times13$ montre que le reste est 12. En effet, $743956=5688\times13+12$, avec $12<13$. Cependant certaines calculatrices type « collège » ou « école » ont une touche division euclidienne qui affiche directement quotient euclidien et reste.

2. Le reste 12 est inférieur d'une unité au diviseur. En ajoutant une unité au dividende, le quotient augmente d'une unité: $73957 = 13\times5689$ et le reste est nul. Si on ajoute au dividende 73956 un nombre compris entre 1 et 12, le quotient de la division euclidienne du nouveau dividende par 13 sera toujours 5689, et le reste sera compris entre 0 et 12.

En retranchant 13 à 73956, le quotient 5688 diminue d'une unité $73943=13\times5687+12$.

Ce quotient restera 5687 pour tous les dividendes compris entre 73943 *et* $73943\text{-}12=73931$.

D. Le quotient euclidien de 2782 par 26 est égal à 107. Le reste est nul. L'algorithme utilisé pour effectuer cette division est illustré par la production d'Aurélie :

Aurélie a une maitrise experte de la technique de la division euclidienne. Elle n'a pas besoin de poser les soustractions successives, ni les répertoires des multiples de 26. L'ordre de grandeur est exact. On peut décrire la procédure d'Aurélie par étapes successives :

© PariMaths.com
Catherine Marchetti-Jacques
Digitally signed by Catherine Marchetti-Jacques
DN: cn=Catherine Marchetti-Jacques, o=PariMaths.com, ou, email=info@parimaths.com, c=FR
Date: 2010.09.09 09:11:13 -06'00'

Etape1 : En 27 combien de fois 26 ?....Trouve 1, reste 1… Abaisse le ‘8’

Etape 2 : En 18 combien de fois 26 ? ...Trouve 0…Abaisse le ‘2’ à la ligne suivante : *le quotient nul de 18 par 26 est bien traité.*

Etape 3 : En 182 combien de fois 26 ?...Trouve 7….reste 0 : *bonnes performances en calcul mental pour effectuer ce calcul directement*

Lucie fait une erreur à l’étape 2, en oubliant de noter le chiffre 0 des dizaines au quotient. Son chiffre des unités, faux, donne un reste supérieur au diviseur à l’étape 3.

Stève fait la même erreur à l’étape 2. Le chiffre 0 des dizaines au quotient est oublié. Les étapes 1 et 3 sont justes.

Laetitia se trompe dès l’étape 1 en divisant 2 par 2. Le codage présent souligne cette procédure. Elle continue sa division en divisant par 2. Elle ne semble pas savoir diviser par un nombre à deux chiffres, par contre la division par 2 est correcte. Le codage global présent au dessus des deux nombres ne semble pas avoir été compris.

E. Le chiffre 1 du quotient amène à compléter la ligne 2 dans la division.

Soit *d* et *u* les deux autres chiffres du quotient.

Leur produit par 275 peut prendre les valeurs suivantes

$1\times275=275 \quad 2\times275=550 \quad 3\times275=825$

$4\times275=1100 \quad 5\times275=1375 \quad 6\times275=1650$

$7\times275=1925 \quad 8\times275=2200 \quad 9\times275=2475$

	.	.	5	.	.	2	7	5
-	2	7	5			1	d	u
	.	.	0	.				
-	.	6	.	.				
			.	.	.			
-			.	5	.			
					3			

A la ligne 4, le chiffre des centaines est 6. On constate qu’il n’y a qu’un multiple de 275 comportant un 6 au rang des centaines (1650) qui correspond à la valeur 6 pour d.

De même la ligne 6 correspond au produit de 275 par u. Le chiffre des dizaines étant 5, il ne peut s’agir que de 550, qui correspond à la valeur 2 pour u.

Il ne reste ensuite qu’à effectuer $275\times162+3$ pour trouver le dividende qui est égal à 44553. On complétera ensuite les différentes étapes de la division.

	.	.	5	.	.	2	7	5
	2	7	5			1	6	.
	.	.	0	.				
-	1	6	5	0				
			.	.	.			
-			.	5	.			
					3			

	.	.	5	.	.	2	7	5
-	2	7	5			1	6	2
	.	.	0	.				
-	1	6	5	0				
			.	.	.			
-			5	5	0			
					3			

	4	4	5	5	3	2	7	5
-	2	7	5			1	6	2
	1	7	0	5				
-	1	6	5	0				
			5	5	3			
-				5	0			
					3			

© PariMaths.com

F. N est le nombre de chocolats, $N < 100$ signifie que N s'écrit avec deux chiffres.

Quand les chocolats sont répartis en tas de 5, il n'en reste pas, donc N est multiple de 5, donc son chiffre des unités est 0 ou 5.

Quand les chocolats sont répartis en tas de 2, il en reste 1, donc N-1 est multiple de 2*.

Pour les mêmes raisons, N-1 est multiple de 3 et multiple de 4. Or 4 et 3 sont premiers entre eux, donc N-1 est multiple de 12. On énumère alors les multiples de 12 à deux chiffres :

N-1	12	24	36	48	60	72	84	96
N	13	**25**	37	49	61	73	**85**	97

Le chiffre des unités de N étant 5, les seules solutions possibles sont $N = 25$ *et* $N = 85$ (on a bien $25 < 100$, 25 multiple de 5 et 24 multiple de 2, 3 et 4, d'autre part $85 < 100$, 85 multiple de 5 et 84 multiple de 2, 3 et 4).

*****_Cette méthode est à retenir : quand on sait que « N a pour reste r dans la division par b », il est plus facile de travailler avec les multiples de b, dont N-r fait partie, que sur l'écriture de la division euclidienne_ $N = b \times q + r$.

Pour s'exercer[1]

Exercice 1

$N = 21 \times 33 + r$ *avec* $0 \le r < 21$, soit $N = 693 + r$

N est multiple de 9. Or 693 est aussi multiple de 9 ($693 = 9 \times 77$) donc r est multiple de 9.

Il y a donc 3 possibilités : $r = 0,\ r = 9,\ r = 18$ ce qui donne pour N : 693, 702, 711.

Exercice 2

$5 + 7 + 9 = 21$. Le reste dans la division par 3 est donc 0, et il est égal à 3 dans la division par 6.

On constate que $15 + 17 + 19 = 30 + 5 + 7 + 9$. 30 étant un multiple de 3 et de 6, les restes dans la division de cette somme par 3 et 6, seront les mêmes que ceux de $5 + 7 + 9$ .De même, on remarque que cela reste vrai pour la dernière somme compte tenu de la décomposition ci-dessous :

$1527 + 1529 + 1531 = 1500 + 12 + 15 + 1500 + 12 + 17 + 1500 + 12 + 19 = 3 \times 1512 + 15 + 17 + 19 = 6 \times 756 = 15 + 17 + 19$

b. Soient trois nombres entiers impairs consécutifs. On peut les exprimer sous la forme $2x + 1,\ 2x + 3,\ 2x + 5$. Leur somme vaut alors $S = 6x + 9$.

L'écriture $S = 6x + 9$ ne représente pas l'écriture de la division euclidienne de S par 6, car $9 > 6$ et 9 ne peut pas être le reste. $S = 6(x + 1) + 3$. Le reste est alors 3 et le quotient euclidien $x + 1$.

c. De même $S = 6x + 9 = 3(2x + 3) + 0$. Le reste est 0 et le quotient euclidien, dans la division par 3, $(2x + 3)$.

d. On cherche trois entiers impairs consécutifs dont la somme est égale à 12027. L'équation $6x + 9 = 12027$ montre que $x = 2003$.

Les trois nombres sont donc $2x + 1 = 4007 \quad 2x + 3 = 4009 \quad 2x + 5 = 4011$.

[1] Nice 99 - 2007G3 - Rouen 99 - Poitiers 96 - Grenoble 2000 - Grenoble 2002 - Bordeaux 2005 - Nice 1996 - Amiens 2001 - Bordeaux 2000 - Aix 92

© PariMaths.com

Exercice 3

$N = 7 \times q + r,\ avec\ r < 7\ et\ q = 2r,\ soit\ N = 15r\ avec\ r < 7$

Les nombres possibles sont donc les six premiers multiples de 15.

Dividende N	15	30	45	60	75	90
Quotient	2	4	6	8	10	12
Reste	1	2	3	4	5	6

Exercice 4

Un entier naturel *n* à quatre chiffres s'écrit sous la forme $\overline{mcdu}$, ce qui signifie que le nombre de centaines est supérieur à 10. On sait d'autre part, que le nombre de centaines est un nombre premier inférieur à 20, alors le nombre de centaines ne peut être égal qu'à 11, 13, 17, 19.

$\overline{mcdu} = \overline{mc} \times 100 + \overline{du}$ donc le reste de la division de *n* par 100 est égal à $\overline{du}$.

On dit que $\overline{du}$ est un multiple de 24, alors il peut être égal à 24, 48, 72 ou 96.

Si le reste de la division de *n* par 5 est égal à 1, cela veut aussi dire que n - 1 est un multiple de 5, donc n - 1 se termine par 0 ou 5. Il n'y a donc qu'une possibilité pour $\overline{du}$, à savoir 96 : en effet $\overline{mc96} - 1 = \overline{mc95}$ est bien un multiple de 5.

Les seuls nombres possibles sont alors 1196, 1396, 1796, 1996.

$1196 = 132 \times 9 + 8$ $\qquad 1396 = 155 \times 9 + 1$

$1796 = 199 \times 9 + 5$ $\qquad 1996 = 221 \times 9 + 7$

Enfin, si le reste de la division de *n* par 9 est supérieur à 6, il y a deux nombres possibles : 1196 et 1996.

Exercice 5

Soit N le nombre de bouteilles. Alors N - 2 est multiple de 3, 5 et 7, qui sont premiers entre eux. Donc *N-2* est multiple de $3 \times 5 \times 7$, qui n'est autre que le PPCM des trois nombres.

Par conséquent, il existe un entier naturel *k* tel que $N - 2 = 105 \times k$, donc $N = 105 \times k + 2$, qui est l'écriture de la division euclidienne de *N* par 105, *k* étant le quotient et 2 le reste.

Or on sait que $1500 \leq N \leq 1600$, soit $105 \times 14 + 20 \leq N \leq 105 \times 15 + 25$, soit encore

$105 \times 14 + 20 \leq 105 \times k + 2 \leq 105 \times 15 + 25$ ce qui signifie que $105 \times 14 + 18 \leq 105 \times k \leq 105 \times 15 + 23$

On trouve donc $k = 15$, qui correspond à $N = 105 \times 15 + 2 = 1577$ bouteilles.

Exercice 6

1. On note *N* le nombre d'enfants dans la colonie $0 \leq \mathrm{N} \leq 100$.

   Quand on regroupe les enfants par trois, il en reste deux, ce qui veut dire que dans la division euclidienne de *N* par 3, le reste est 2 : il existe un entier naturel q tel que $N = 3q + 2$. On en déduit que $N - 2 = 3q$, et donc que N - 2 est un multiple de 3.

   De même, compte tenu des restes dans les regroupements par 4 et 5, on déduit que N - 1 est un multiple de 4, et que N - 2 est un multiple de 5.

© PariMaths.com

$N-2$ est donc à la fois un multiple de 3 et un multiple de 5 : comme 3 et 5 sont premiers entre eux, $N-2$ est donc un multiple de 3×5, c'est-à-dire de 15. N étant compris entre 0 et 100, $N-2$ est compris entre -2 et 98. Les multiples de 15 compris entre -2 et 98 sont les entiers : 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90.

Parmi les nombres précédents, on cherche ceux qui vérifient $N-1$ multiple de 4

$N-2$	0	15	30	45	60	75	90
$N-1$	1	16	31	46	61	76	91

Il y a donc deux valeurs de N pour lesquelles $N-1$ est multiple de 4, $N=17$ *et* $N=77$

Pour $N=17$, la seule décomposition possible est $17=1\times 17$, ce qui signifierait 1'équipe de 17enfants ou 17 équipes de 1 enfant, ce qui est contraire à l'énoncé (des équipes, au moins deux enfants)

Pour $N=77$, la seule décomposition $77=7\times 11$ permet de trouver deux possibilités : 7 équipes de 11 enfants, ou 11 équipes de 7 enfants.

Exercice 7

Problème 1 : Soient n_1 et n_2 le nombre (entier) de billes attribuées aux deux enfants. Alors $n_1\times n_2=285$

La décomposition en facteurs premiers de 285 est $285=3\times 5\times 19$

n_1	1	3	5	19
n_2	385	95	57	15

On peut donc donner l'une des valeurs de n_1 à un enfant, l'autre aura la valeur associée de n_2.

Problème 2 : $S_1\times S_2\times S_3=2431$

La méthode de résolution est la même que celle du problème précédent. On va décomposer 2431 en produits de facteurs premiers, et lister les produits de trois nombres possibles : $2431=11\times 13\times 17$

On peut donc donner au premier 11€, le second recevra 13€, le troisième aura les 17€ restants.

On peut aussi donner seulement 1€ au premier (le facteur 1 n'est pas visible dans la décomposition mais il ne faut pas l'oublier), le second peut alors recevoir 11, 13 ou 17€, alors le troisième recevra respectivement 221€, 187€, ou 143€. Il y a quatre distributions possibles.

Problème 3 :

On ne connaît pas le nombre de personnes, on va le noter n et S le montant de la cagnotte.

$S=129\times n+28$, avec $S<4000$. D'où $129\times n<3972$, soit en divisant par 129, $30<n<31$

On a donc au maximum 30 personnes et le montant est de $S=129\times 30+28=3898$ €.

Exercice 8

$171=21\times 8+3$ et $246=8\times 30+6$

a. Les 171 élèves déjà installés ont donc déjà rempli 21 tables, et 3 élèves sont installés à la dernière table. On peut donc accueillir encore **5** élèves sans occuper une nouvelle table.

© PariMaths.com

b. Les 246 élèves vont donc remplir complètement 30 tables, et une dernière table sera occupée par les 6 derniers élèves qui entrent au réfectoire, donc en particulier par Nathalie et ses trois amies. Elles seront donc à la même table.

Exercice 9

Dans la division euclidienne de *a* par 11, le reste est *r*, donc $a = 11b + r$ *avec* $0 \leq r < 11$.

De même $a' = 11b' + r'$ *avec* $0 \leq r' < 11$. Le problème ici porte sur la valeur du reste qui doit toujours être inférieur au diviseur.

a. $a + a' = 11(b + b') + r + r'$, *avec* $0 \leq r + r' < 22$. Deux cas sont alors possibles :

Si $r + r' < 11$, alors le reste est $r + r'$.

Si $r + r' \geq 11$, alors le reste est $r + r' - 11$ (le quotient augmente alors de 1)

b. $3a = 33b + 3r$, avec $0 \leq 3r < 33$. Trois cas sont alors possibles :

Si $0 \leq 3r < 11$, alors le reste est $3r$

Si $11 \leq 3r < 22$, alors le reste est $3r - 11$(le quotient augmente alors de 1)

Si $3r \geq 22$, alors le reste est $3r - 22$(le quotient augmente alors de 2) .

Exercice 10

$n = 763$ $\quad$ $763763 : 7 = 109109$ $\quad$ $109109 : 11 = 9919$ $\quad$ $9919 : 13 = 763$

$n = 691$ $\quad$ $691691 : 7 = 98813$ $\quad$ $98813 : 11 = 8983$ $\quad$ $8983 : 13 = 691$

Soit *n* le nombre de départ, à trois chiffres, et *N* le nombre formé par l'écriture consécutive de deux fois le même nombre *n*. On peut donc conjecturer le résultat suivant : le quotient obtenu en divisant successivement par 7, par 11 et par 13, un nombre *N* formé par l'écriture consécutive de deux fois le même nombre *n* est égal à *n*. Il reste à le démontrer en généralisant.

On peut remarquer que, pour $n = 763$, $N = 763763 = 763 \times 1000 + 763$.

Plus généralement $N = 1000 \times n + n = 1001n$. Or $7 \times 11 \times 13 = 1001$. D'où $N = 7 \times 11 \times 13 \times n$. Le quotient de N par $7 \times 11 \times 13$ est bien *n*. *N* étant un multiple de 7, de 11 et de 13, on peut vérifier que les divisions successives de *N* par 7, puis 11, puis 13 reviennent à diviser *N* par $7 \times 11 \times 13$.

En effet $N = 7 \times q_1 = 7 \times (11 \times q_2) = 7 \times 11 \times (13 \times q_3) = 7 \times 11 \times 13 \times q_3$

Le quotient obtenu en divisant successivement par 7, par 11 et par 13, un nombre *N* formé par l'écriture consécutive de deux fois le même nombre *n* est donc bien égal à *n*.