S9C. Autour de la MULTIPLICATION Corrigé
Calcul posé, calcul réfléchi, calcul instrumenté

Mise en route[1]

A. Un peu de calcul mental

1. $36\times6=36\times(2\times3)=(36\times2)\times3=216$ *associativité de la multiplication*, ou $(40-4)\times6=240-24=216$ *distributivité de la multiplication sur la soustraction*

$36\times25 = 36\times\frac{100}{4}=\frac{3600}{4}= 900$ *Passage à l'écriture fractionnaire de 25 et calcul fractionnaire*

$36\times39=36\times(40-1)=1440-36=1404$ *distributivité de la multiplication sur la soustraction*

$36\times44=(40-4)\times(40+4)=1600-16=1584$ *identité remarquable* $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$36\times36 = 36\times(4\times9)=(36\times4)\times9=(36\times2\times2)\times9=144\times9=144\times(10-1)=1440-144=1296$

2. $1235\times43=53105$ Grâce à la distributivité de la multiplication sur l'addition, on a directement :

$1236\times43=(1235+1)\times43=1235\times43+43=53105+43=53148$

$44\times1235=(43+1)\times1235=43\times1235+1235=53105+1235=54340$

$1236\times44=1236\times43+1236=53148+1236=54384$

$1238\times43=1236\times43+43+43=53148+86=53234$

B. La méthode égyptienne

31	**186**		**25**	**35**	1×35		**25**	**35**
15	**372**			**70**	2×35		~~**12**~~	~~**70**~~
7	**744**			**140**	$2^2\times35$		~~**6**~~	~~**140**~~
3	**1488**			**280**	$2^3\times35$		**3**	**280**
1	**2976**			**560**	$2^4\times35$		**1**	**560**
	5726			**875**				**875**
Question 1			Question 2a				Question 2b	

1.On écrit 31 dans la colonne de gauche, et 186 dans la colonne de droite. Successivement on divise par 2 à gauche, jusqu'à 1, en notant uniquement le quotient euclidien. A droite, on multiplie par 2 successivement jusqu'à la dernière même ligne.

Dans l'exemple on peut voir que le produit s'obtient en ajoutant certains termes qui n'ont pas été barrés, qui correspondent aux lignes où le nombre de gauche est pair (cette observation prendra sens avec la question suivante). On peut conclure ici en ajoutant tous les nombres de la colonne de droite (car à gauche tous les nombres sont impairs).

[1] B. Limoges 99 ; C. Guyane 2004

2a. Pour calculer 25×35 on peut utiliser la décomposition selon les puissances de deux (écriture d'un nombre en base deux) :

$$25=16+8+1=1\times2^4+1\times2^3+1\times2^{\circ}$$

$$25\times35=(16+8+1)\times35=(2^4+2^3+2^0)\times35=560+280+35=875$$

On n'ajoute que les résultats correspondant au rang existant dans la décomposition. (*L'observation sur la parité des termes de la colonne de gauche n'est pas encore explicitée ici*)

On peut aussi utiliser la distributivité

$$\begin{aligned}25\times35=(12\times2+1)\times35 &= 12\times2\times35+35=12\times70+35\\ &=(6\times2)\times70+35=6\times2\times70+35=6\times140+35\\ &=(3\times2)\times140+35=3\times280+35\\ &=(1\times2+1)\times280+35=1\times560+280+35=875\end{aligned}$$

2b. On peut expliquer la méthode en disant que le produit 25×35 peut se remplacer par $12\times70+35$ (je garde le reste 35), que 12×70 peut se remplacer par 6×140 (je barre 12×70), puis 6×140 se remplace par 3×280 (je barre 6×140), qui lui se remplace par $1\times560+280$ (je garde le reste 280).

Il faut donc ajouter $35+280+560$

On constate que, sur le plan pratique, le résultat s'obtient en ajoutant uniquement les termes associés à un nombre impair à gauche, lignes associées à un reste non nul.

3. Puisqu'il y a 8 lignes, dans la colonne de gauche, en partant d'en bas :

Ligne 8 : le nombre est égal à 1

Ligne 7 : le nombre est nécessairement 2 : en effet, 1 étant le quotient euclidien du nombre cherché par 2, le reste est 0 ou 1 donc le nombre est 2 ou 3, mais il doit être pair (car barré), c'est donc 2.

Ligne 6 : le nombre doit être égal à 4 (même raisonnement avec 4 ou 5)…..

Ligne 5 : 8 ......

Ligne 1 : 128.

On constate que c'est une puissance de 2, ici 2^7.

L'exposant de 2 est égal au nombre de lignes diminué de 1. Les nombres de la colonne de droite sont doublés à chaque ligne, le premier peut être choisi arbitrairement, par exemple 150.

128	× **~~150~~**
~~64~~	~~300~~
~~32~~	~~600~~
~~16~~	~~1200~~
~~8~~	~~2400~~
~~4~~	~~4800~~
~~2~~	~~9600~~
1	19200
	128×150=19200

C. L'art de compter sur les doigts

Pour 7×7, on met en vis-à-vis le n°7 et le n°7(les annulaires) , il reste alors 3 doigts libres à main gauche (côté pouce) et 3doigts libres à main droite qui donnent par multiplication le chiffre des unités $u=9$. Le nombre de doigts restants (les deux annulaires et les deux auriculaires) donnent le chiffre des dizaines $d=4$ donc $7\times7=49$ (photo gauche). De même pour 8×7, il reste 3 doigts et 2 doigts libres soit $u=6$. Il reste 5 doigts d'où $8\times7=56$ (photo centre)



Pour 6×7, on trouverait un nombre d'unités $u=12$ et un chiffre des dizaines $d=3$. Il faut alors effectuer un échange de dix unités contre une dizaine pour avoir l'écriture chiffrée $6\times7=3\times10+12=4\times10+2=42$
Cette situation peut se produire pour 6×7, et pour 6×6. On a alors $u=4\times4=16$ *et* $d=2$ qui se transforme en 36 (photo droite).
Justification de la méthode : Soient x *et* y deux nombres compris entre 6 et 10

$$\overline{du}=d\times10+u=10\times\underbrace{[(x-5)+(y-5)]}_{dizaines}+\underbrace{(10-x)(10-y)}_{unités}$$

$$=10(x+y-10)+100-10x-10y+xy=10x+10y-100+100-10x-10y+xy=x\times y$$

Le nombre obtenu avec ce procédé correspond bien au produit des deux nombres x *et* y choisis.

Pour s'exercer

Exercice 1

La méthode classique repose sur la décomposition canonique du nombre en système décimal et sur la distributivité de la multiplication sur l'addition.

$5263\times468=5263\times(400+60+8)=5263\times400+5263\times60+5263\times8$

Cependant le calcul posé s'effectue de droite à gauche :
Première ligne : $5263\times8=41624$
Deuxième ligne : $5263\times60=312180$
Le zéro des unités est parfois remplacé par un point ; on calcule alors le nombre de dizaines.
Troisième ligne : $5263\times400=2081200$
Le zéro des unités et des dizaines est parfois remplacé par un point ; on calcule alors le nombre de centaines.

Méthode russe

On retrouve ici les bases de la méthode égyptienne décrite en B.
Cette méthode s'appuie sur la décomposition d'un nombre en base 2 et sur la distributivité de la multiplication sur l'addition. A gauche la colonne présente la liste des puissances de 2, soit 1, 2, 4, 8, 16, 32 (2^n avec n allant de 0 à 5). A droite la colonne présente les produits successifs de la forme 67×2^n (avec n de 0 à 5), c'est-à-dire qu'on double le résultat à chaque ligne.
Pour calculer 53×67, on décompose 53 en somme de puissances de 2, soit 53 = 32 + 16 + 4 + 1.

La distributivité permet d'écrire $53\times67=53\times67=(1+4+16+32)\times67=1\times67+4\times67+16\times67+32\times67$

On sélectionne alors les lignes où apparaissent 32, 16, 4 et 1 (dont la somme est égale à 53), et on ajoute les valeurs associées dans la colonne de droite.

Méthode grecque ou romaine

Cette méthode s'appuie directement sur la distributivité de la multiplication sur l'addition.

$4608\times369=(4000+600+8)(300+60+9)$

1200000 représente le produit de 4000 par 300

180000 le produit de 600 par 300

2400 le produit de 8 par 300

240000 le produit de 4000par 60

36000 le produit de 600 par 60

480 le produit de 8 par 60

36000 le produit de 4000 par 9

5400 le produit de 600 par 9

72 le produit de 8 par 9

Méthode per gélosia

On voit que chaque nombre est écrit en vis-à-vis d'un tableau, chaque chiffre correspondant à une ligne (l) pour l'un (de bas en haut), et à une colonne (c) pour l'autre (de gauche à droite).

On effectue successivement les produits de chaque couple de chiffres $l\times c$.

Le résultat de ces produits est alors noté dans chaque case, en bas à droite le chiffre des dizaines, en haut à gauche le chiffre des unités. Il reste ensuite à effectuer les sommes « en diagonale » : ainsi 0 représente le chiffre des unités. Puis $5+4+6=15$ (j'écris 5 et je retiens 1) représente le rang des dizaines. En effet 15 représente le produit de 5 unités par 3 dizaines soit 150, soit 15 dizaines, soit 5dizaines et 1 centaine. Le chiffre 4 est le chiffre des dizaines de 40, et 56 est le produit de 8 unités par 70, soit 560, soit 56 dizaines, soit 6 dizaines et 5 centaines. Ensuite $0+1+1+5+2+1=10$ (j'écris 0 et je retiens 1…..) représente le rang des centaines et ainsi de suite…Le résultat cherché se lit de gauche à droite (en remontant) : 13798050.

Méthode per rombo

On commence par multiplier le chiffre des unités du deuxième nombre (ici 6) par chaque chiffre du premier nombre, en commençant par le chiffre le plus à gauche $6\times4=24$, puis $6\times3=18$, puis $6\times9=54$, puis $6\times8=48$. Ces résultats sont posés en diagonale les uns en dessous des autres (en noir dans le tableau), selon leur valeur dans le résultat final, comme dans un tableau de numération.

			c	d	u	c	d	u
				2	4			
			2	0	1	8		
		1	6	1	5	5	4	
	2	8	1	2	4	5	4	8
		2	1	3	6	4	0	
			6	3	3	2		
				5	6			
	3	2	7	9	1	4	8	8

On fait de même en multipliant le chiffre des dizaines (ici 5). Les résultats sont écrits en diagonale, ils se juxtaposent aux précédents compte tenu du changement de rang.

La deuxième ligne représente la juxtaposition de 5×4, 6×3.

La troisième ligne celle de 4×4, 5×3, 6×9. Ainsi de suite…

Du point de vue de la décomposition canonique des nombres et de la distributivité, chaque 'nombre de deux chiffres' inscrits a de fait une valeur associée au rang auquel il se situe. Par exemple **16** représente en fait le produit de 4000 par 400, il s'agit donc de 1600 000.

Méthode per copa

La distributivité de la multiplication sur l'addition permet de décomposer le produit de 937 par 658 sous la forme :

$$937 \times 658 = (900+30+7)(600+50+8) = 540000+45000+7200+18000+1500+240+4200+350+56$$

Dans la présentation de cette multiplication on va observer la position de chacun de ces termes en repérant la position des chiffres qui les composent :

Mille						
c	**d**	**u**		**c**	**d**	**u**
5	**4**	**5**		**2**	**4**	6
	4	**7**		**5**	**5**	
	1	**8**		**2**	5	
		1		**2**		
		4		**3**		
6	**1**	**6**		**5**	**4**	**6**

On appelle rang 0, le rang des unités.

On effectue 9×6 : on pose 54 qui représente 5 unités de rang 5 et 4 unités de rang 4.

On effectue 9×5 : on pose 45 qui représente 4 unités de rang 4 et 5 unités de rang 3. On 'aligne' (sur la colonne) les unités de même rang comme dans un tableau de numération. Le décalage observé dans les colonnes pour un même terme (comme pour 45, le 4 et le 5) vient du fait qu'on complète la colonne de chaque rang.

On effectue 9×8 : on pose 72 dans les colonnes respectives à chaque rang.

Ainsi de suite…

Exercice 2

1. Voici quelques exemples : $24 \times 26 = 624$ $\quad 13 \times 17 = 221$ $\quad 42 \times 48 = 2016$
   $51 \times 59 = 3009 \quad (5 \times 6 = 30 \text{ et } 1 \times 9 = 9)$ $\quad 95 \times 95 = 9025 \quad (9 \times 9 = 81 \text{ et } 5 \times 5 = 25)$

On peut constater que chaque nombre se termine par le produit des deux chiffres d'unités. Le nombre de centaines est le produit du chiffre des dizaines par son successeur. On peut donc énoncer la règle suivante :

Le produit de deux nombres entiers naturels strictement inférieurs à 100, ayant le même nombre de dizaines, et dont la somme des chiffres des unités est égal à 10, est un nombre qui a au plus 4 chiffres : il se termine *par le produit des deux chiffres d'unités et son nombre de centaines est le produit du chiffre des dizaines par son successeur.*

Les deux entiers peuvent s'écrire $10\,d+u$ *et* $10\,d+u'$, où d est leur chiffre des dizaines commun, *u et u'* leur chiffre respectif des unités avec $u+u'=10$.

Alors, $(10d+u)\times(10\,d+u')=100d^2+10d\times(u+u')+u\times u'=100d^2+100d+uu' \;=100\times d(d+1)+u\times u'$

Le nombre de centaines de ce nombre est bien égal à $d(d+1)$ et les deux derniers chiffres de ce nombre sont les chiffres du produit $u\times u'$ (produit nécessairement inférieur à 100).

2. $51\times59=3009$ ($5\times6=30$ et $1\times9=9$) : 30 représentant le nombre de centaines, on a 0 au rang des dizaines.

$95\times95=9025$ ($9\times9=81$ et $5\times5=25$)

Exercice 3

On remarque que :

$65^2=4225=4200+25$ *soit* $6\times7\times100+25=4225$.

$145^2=21025=21000+25$ *soit* $14\times15\times100+25=21025$

$1275^2=1625625=1625600+25$ *soit* $127\times128\times100+25=1625625$

a. Soit un nombre dont le chiffre des unités est égal à 5 ; on note D son *nombre* de dizaines.

Alors l'écriture chiffrée (en base 10) de son carré se termine par 25, et son nombre de centaines est égal au produit de son nombre D de dizaines par son successeur D+1.

b. 15^2 = 225, et on a bien la terminaison par 25 et $1\times2=2$.

125²=15625 et on a bien la terminaison par 25 et $12\times13=156$

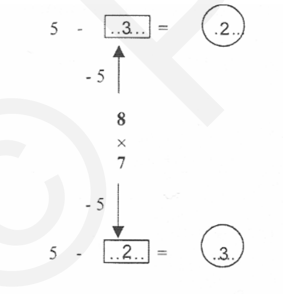
c. Un nombre se terminant par 5 peut s'écrire $\overline{D5}=D\times10+5$ où D désigne son nombre de dizaines.

$(D\times10+5)^2=(10D+5)^2=100D^2+100D+25=100D(D+1)+25$

Ce nombre se termine par 25, et son nombre de centaines est égal à D × (D+1).

Exercice 4

1. Pour calculer 8×7 :

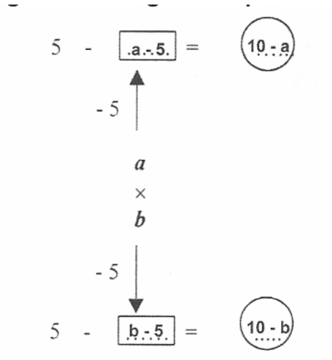


$8-5=3$ *et* $5-3=2$

$7-5=2$ *et* $5-2=3$

$(3+2)\times10+2\times3=56$

2.



$a-5$ *et* $5-(a-5)=10-a$

$b-5$ *et* $5-(b-5)=10-b$

$$(a-5+b-5)\times 10+(10-a)\times(10-b)$$
$$=(a+b-10)\times 10+(10-a)\times(10-b)$$
$$=10a+10b-100+100-10a-10b+ab=ab$$

a et b étant supérieurs à 5, a-5 et b-5 sont positifs et inférieurs à 5, de même que $5-(a-5)$ *et* $5-(b-5)$

Exercice 5

1. Soit $B=92\ 865\ 317$ *et* $C=814\ 975$

$B=92\ 865\ 317=9,2865317\times 10^7\approx 9\times 10^7$ et $C=814\ 975=8,14975\times 10^5\approx 8\times 10^5$

$B\times C\approx 72\times 10^{12}$. C'est donc un nombre a 14 chiffres.

2. Le chiffre des unités du produit vient automatiquement du produit des chiffres des unités, soit $7\times 5=35$.
Le dernier chiffre est donc bien 5. Pour trouver le chiffre des dizaines il faut décomposer chaque nombre :

$$A=(92\ 865\ 31\times 10+7)(814\ 97\times 10+5)=(92\ 865\ 31\times 814\ 97)\times 100+(92\ 865\ 31\times 5+814\ 97\times 7)\times 10+7\times 5$$
$$A=(92\ 865\ 31\times 814\ 97)\times 100+47003134\times 10+3\times 10+5=(92\ 865\ 31\times 814\ 97)\times 100+47003137\times 10+5$$

Le chiffre des dizaines est donc bien 7.

Plus simplement, on peut aussi décomposer en centaines et unités:

$$(928\ 653\times 100+17)(8\ 149\times 100+75)=928\ 653\times 8\ 149\times 10^4+(928\ 653\times 75+8\ 149\times 17)\times 100+17\times 75$$

Les deux derniers chiffres du produit 17×75 *(=1275) donnent le chiffre des unités de A (5) et le chiffre de dizaines(7).*

Effectivement une calculatrice à 10 chiffres donne une écriture scientifique du résultat $9,286531781\times 10^{13}$ sans afficher tous les chiffres significatifs. C'est donc une valeur approchée et non exacte. Un procédé va consister à décomposer additivement un des facteurs du produit A (ou les deux), mettre en mémoire les résultats partiels, puis les ajouter.

Voici deux exemples de décomposition possible : la première 'écriture ingénieur' (mille, milliers, millions) ne donne pas exactement tous les chiffres (retenue au rang des millions) :

$$A=(92\times 10^6+865\times 10^3+317)(814\times 10^3+975)=74888\times 10^9+92\times 10^6$$
$$A=(92\times 10^6+865317)(814\times 10^3+975)=74888\times 10^9+89700\times 10^6+704368038\times 10^3+843684075$$
$$A=74888\times 10^9+89\times 10^9+700\times 10^6+704\times 10^9+368\times 10^6+38\times 10^3+843\times 10^6+684\times 10^3+75$$
$$A=75681\times 10^9+1911\times 10^6+722\times 10^3+75=75682911722075$$

La deuxième affiche chaque rang par juxtaposition sans retenue.

$$A=(9286\times 10^4+5317)\times 814975=92\ 86\times 814975\times 10^4+5317\times 814975=7567857850\times 10^4+4333222075$$
$$A=7567857850\times 10^4+433322\times 10^4+2075=(7567857850+433322)\times 10^4+2075=7568291172\times 10^4+2075$$
$$A=75682911722075$$

Exercice 6

1. La 1ère ligne de la table de Pythagore, en considérant les tables de multiplication des entiers compris entre 1 et 9, donne les résultats des produits des chiffres de 1 à 9 par 1.

$$S = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{(1+9)\times 9}{2} = 45$$

Règle pratique : en ajoutant terme à terme n nombres entiers consécutifs, sous la forme $1+2+...+(n-1)+n$ et $n+(n-1)+...+2+1$, on trouve $(n+1)+(n+1)+....+(n+1)+(n+1)$ soit n fois (n+1).

D'où $S = 1+2+3+....+n = \dfrac{n(n+1)\times n}{2}$

La 2ème ligne de la table de Pythagore donne les résultats des produits des chiffres de 1 à 9 par 2.

$$S_2 = 2\times 1+2\times 2+2\times 3+....+2\times 9 = 2\times(1+2+3+...9)\times 2 = 2S = 2\times 45 = 90$$

Ainsi de suite on trouve $S_9 = 9S = 9\times 45$

La somme totale est donc : $S+2S+3S+....9S = (1+2+....9)\times S = S\times S = S^2 = 2025$

2. $\dfrac{S}{C} = \dfrac{28+30+40+42}{35} = \dfrac{140}{35} = 4$

En considérant une autre case centrale, par exemple 21, on obtient : $\dfrac{S}{C} = \dfrac{18+24+14+28}{21} = \dfrac{84}{21} = 4$

En effet une case centrale *c* représentant le produit de *a* par *b*, est située sur la ligne *a* et la colonne *b*. Les résultats des tables sont obtenus par comptage de *a* en *a* (ou de *b* en *b*).

D'où : $S = \dfrac{(c-a)+(c-b)+(c+a)+(c+b)}{c} = \dfrac{4c}{c} = 4$

Exercice 7

Soient a et b deux nombres entiers tels que $a = \overline{xy}$ *et* $b = \overline{xz}$ *avec* $y+z=10$

Alors $a\times b = \overline{xy}\times\overline{xz} = (10x+y)(10x+z) = 100x^2+10xy+10xz+yz = 100x^2+10x(y+z)+yz$

$a\times b = 100x^2+100x+yz$ *car* $y+z=10$, soit $a\times b = x(x+1)\times 100+yz$

Comme z et y sont des chiffres, le produit yz est inférieur à 100, le nombre de centaines de $a\times b$ est $x(x+1)$ et $\overline{yz}$ forme les deux derniers chiffres.

Règle : Le produit $a\times b$ est égal au nombre formé en juxtaposant, dans cet ordre le produit de x par $(x+1)$ et le produit de y par z (en plaçant un zéro à gauche de $\overline{yz}$ s'il n'a qu'un seul chiffre).

Par exemple, $84\times 86 = 7224$ avec $72 = 8\times 9$ et $24 = 4\times 6$, ou $63\times 67 = 4221$ *avec* $42 = 6\times 7$ *et* $21 = 3\times 7$