

S11 Autour de la GEOMETRIE PLANE

Vocabulaire et constructions de base

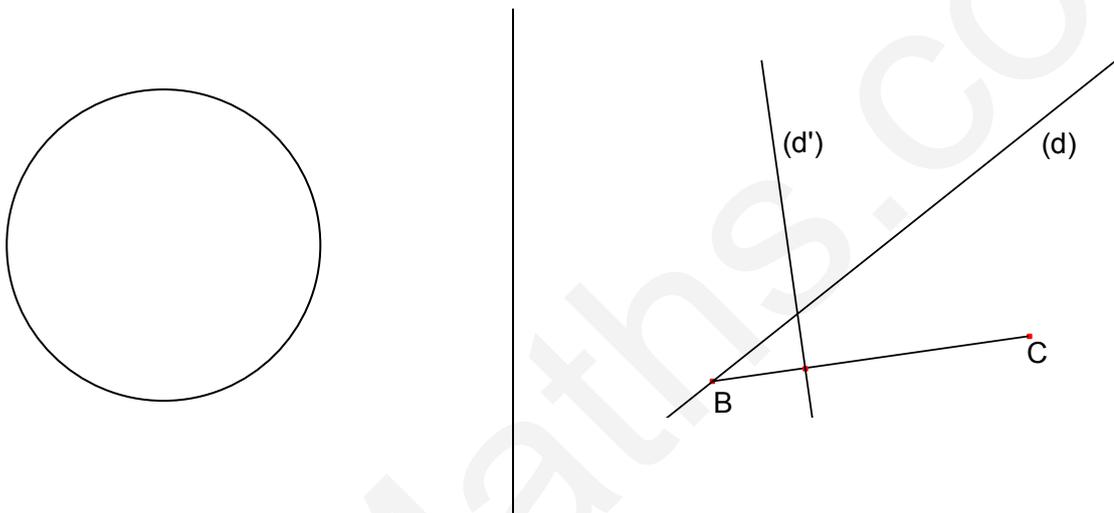
Mise en route

1. A et B sont deux points du plan. que représentent (AB), [AB], \overline{AB} , AB ?
2. A, B et C sont trois points distincts du plan, non alignés. Tracer à la règle et à l'équerre :
 - la droite d' **perpendiculaire** à la droite (AB) passant par C.
 - puis la droite d'' **parallèle** à la droite (AB) passant par C.
3. (d) est une droite du plan. Construire à la règle et au compas :
 - la droite d_1 **perpendiculaire** à la droite (d) passant par un point A du plan, lorsque A n'appartient pas à la droite (d).
 - la droite d_2 **perpendiculaire** à la droite (d) passant par un point B, lorsque B appartient à la droite (d).
 - la droite d_3 **parallèle** à la droite (d) passant par A, lorsque A n'appartient pas à la droite (d).
4. A et B sont deux points distincts du plan. Construire à la règle et au compas :
 - le cercle C_1 de centre A passant par B.
 - le cercle C_2 de centre B de rayon [AB].
 - le cercle C_3 de diamètre [AB].
5. Tracer, à main levée, sans rapporteur :
 - un **angle aigu**, un **angle obtus**, un **angle plat**, un **angle droit**.
 - deux angles **adjacents complémentaires**, deux angles **adjacents supplémentaires**.
 - deux angles **opposés par le sommet**, deux angles **alternes-internes**, deux angles **correspondants**.
6. Construire à la règle et au compas :
 - la **bissectrice** de l'angle \widehat{ABC} , A, B, C étant trois points non alignés
 - un angle mesurant 90° ; même question avec 45° .
 - un angle mesurant 60° ; mêmes questions avec 30° , puis avec 120° .
7. Placer cinq points distincts A, B, C, D, E. Tracer l'angle \widehat{ABC} ainsi que le segment [DE]. Construire à la règle et au compas le point F tel que $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$.
8. Tracer un segment [AB]. Construire à la règle et au compas
 - un **triangle équilatéral** CDE dont le côté [CD] a la même longueur que [AB].
 - un **triangle rectangle isocèle d'hypoténuse** [AB]. Trouver toutes les possibilités.
 - un triangle ABC tel que $\hat{A}=30^\circ$ et $\hat{B}=60^\circ$. Quelle est sa nature ?
9. Tracer un segment [CD]. Placer un point M sur ce segment. Construire le triangle BCD rectangle en B, sachant que M est le pied de la **hauteur** issue de B.

10. Soit A, B et C trois points distincts du plan, non alignés. Construire les **médiatrices**, les **bissectrices** intérieures, les **médianes** et les **hauteurs** du triangle ABC. Placer l'**orthocentre** H du triangle ABC, son **centre de gravité** G, le centre C de son **cercle circonscrit**, le centre I de son **cercle inscrit**. Que peut-on constater ?

Premières propriétés

11. A et B sont deux points distincts du plan. Construire à la règle et au compas la **médiatrice du segment** [AB]. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$? tels que $MA < MB$?
12. Construire à la règle et au compas le centre du cercle (C), voir figure ci-dessous. Justifier.
13. Construire le triangle ABC sachant que (d) est la hauteur issue de B et (d') la hauteur issue de A.



14. (C) est un cercle de centre O, et A, B, R, S sont quatre points distincts appartenant à (C). Tracer l'angle au centre \widehat{AOB} interceptant l'arc \widehat{AB} , puis les deux angles inscrits \widehat{ARB} et \widehat{ASB} interceptant le même arc \widehat{AB} . Quelle relation peut-on écrire entre la mesure de ces trois angles ?
15. Soit un cercle de diamètre [AB] et, sur ce cercle, un point C tel que l'angle \widehat{BAC} mesure 50° . Calculer la mesure des angles \widehat{ACB} et \widehat{ABC} en justifiant les réponses.
16. Tracer un cercle de centre C. Placer un point A **sur** ce cercle. Construire la **tangente au cercle** passant par A. Justifier.
17. Tracer un cercle de centre C. Placer un point B **extérieur** à ce cercle. Construire la **tangente au cercle** passant par B. Justifier.
18. Soient ABC et BCD deux triangles rectangles respectivement en A et en D. Démontrer que les points A et D appartiennent au cercle de diamètre [BC]. Construire un troisième triangle BEC, rectangle en E.
19. Le triangle POT est un triangle rectangle en O. Le point S est le milieu du segment [TP] et $TP = 8 \text{ cm}$. Quelle est la longueur du segment [SO] ?
20. Soit RST un triangle isocèle en T et soit U le symétrique du point R par rapport au point T. Démontrer que le triangle RSU est rectangle en S.

Pour s'exercer¹

Exercice 1

Toutes les constructions nécessaires sont à faire à la règle graduée et au compas. Les traits de construction devront rester apparents.

1. Construire un triangle ABC tel que $BC = 6 \text{ cm}$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ et $\widehat{ACB} = 30^\circ$
2. Soit D le symétrique de B par rapport à A. Montrer que la droite (AC) est la médiatrice du segment [BD].
3. Quelle est la nature du triangle BCD ?
4. Soit E le symétrique de D par rapport à C. Quelle est la nature de chacun des triangles BCE et BDE ?

Exercice 2

On considère une droite (d), un point B appartenant à la droite (d) et un point A extérieur à la droite (d).

1. Construire à la règle non graduée et au compas, le point C tel que la droite (d) soit un axe de symétrie du triangle ABC. Décrire et justifier cette construction.
2. Construire le point E, symétrique du point A par rapport au point B.
3. Quelle est la nature du triangle ACE ?
4. Quelle est la nature du triangle BEC ?

Exercice 3

Dans cet exercice, tous les ensembles trouvés seront tracés sur une même figure.

Soient A et B deux points distincts du plan.

Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

- a. ABM soit un triangle rectangle en A ou en B ?
- b. ABM soit un triangle rectangle en M ?
- c. ABM soit un triangle isocèle en A ou en B ?
- d. ABM soit un triangle isocèle en M ?

Exercice 4

Le syndicat d'initiative de la ville de Belle Rive organise une chasse au trésor. Voici plusieurs indices.

L'annexe ci-dessous présente le plan des lieux de la chasse au trésor.

Indice 1 : le trésor se trouve à plus de 500mètres de la ligne à haute tension (L)

Indice 2 : le trésor est à plus de 800 mètres de l'école E.

Indice 3 : Le trésor se trouve à moins de 300 mètres de la bibliothèque B.

Indice 4 : le trésor est à égale distance du stade S et de la piscine P.

- a. Pour chacun de ces indices, décrire la région correspondante où peut se situer le trésor.
- b. Le plan représenté est à l'échelle $\frac{1}{10000}$

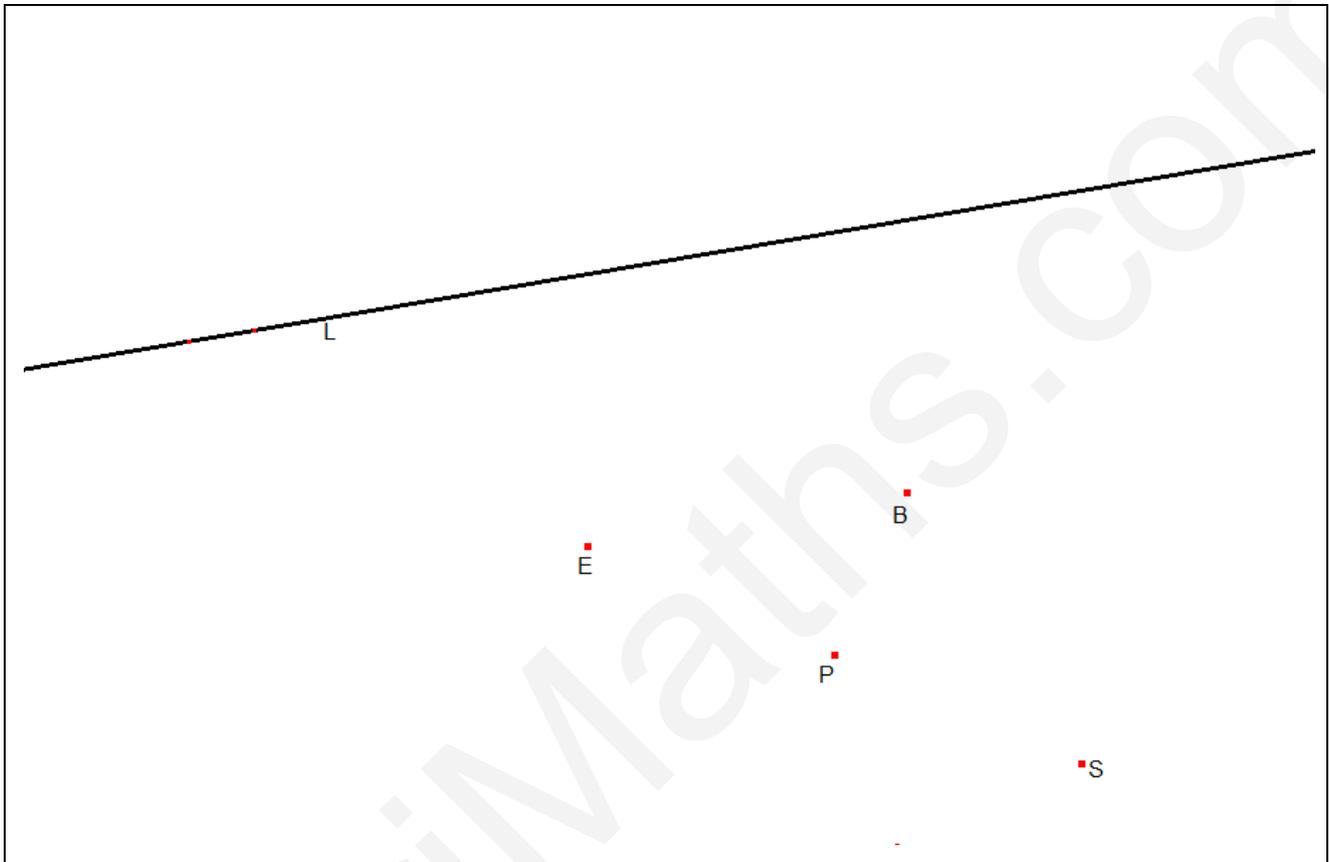
Reproduire ce plan sur votre copie, à la règle graduée, à l'équerre et au compas, sachant que

¹ Lyon 97- Orléans 2003 - Besançon 2003 – D'après Gpe1.2008
Parimaths.com

- les points E et B sont situés à 5 cm de la droite (L) avec $EB = 6\text{cm}$.
- Le triangle EBS est isocèle en B avec $ES = 10\text{cm}$.
- P est le milieu du segment [ES].

Mettre en évidence en couleur la région où peut se trouver le trésor. Laisser apparents les tracés de cette construction.

ANNEXE



A retenir

Notations²

(**AB**) représente la droite qui passe par A et B, [**AB**] représente le segment d'extrémités A et B, [**AB**] la demi-droite d'origine A passant par B, **AB** la longueur du segment [AB].

Propriétés de l'orthogonalité et du parallélisme

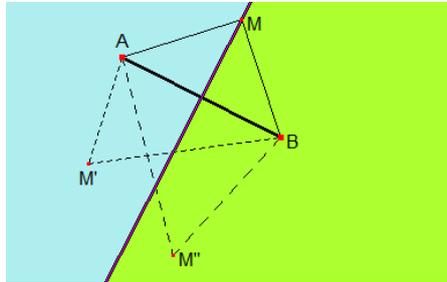
- La distance d'un point à une droite se mesure perpendiculairement à la droite.
- La distance entre deux droites parallèles est constante, elle se mesure perpendiculairement aux deux droites.
- Deux droites perpendiculaires à une même droite d sont parallèles entre elles.
- Deux droites parallèles à une même droite d sont parallèles entre elles.

Propriété de la médiatrice d'un segment

- Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, il est sur la médiatrice du segment.

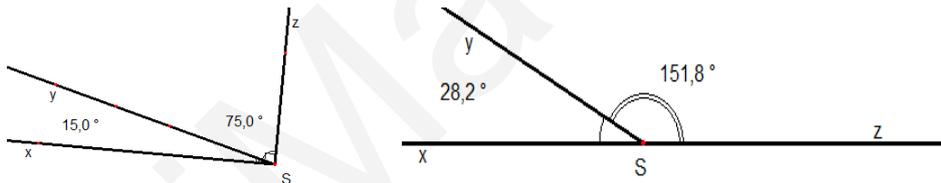
² Ces notations sont à connaître et à utiliser avec attention et précaution ; les erreurs sont sanctionnées pour le concours.
Parimaths.com

- Si un point M est sur la médiatrice d'un segment $[AB]$, il est équidistant des extrémités de ce segment et $MA = MB$
- La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire au segment en son milieu.
- La médiatrice d'un segment $[AB]$ partage le plan en deux demi-plans P_A et P_B . Le demi-plan P_A est l'ensemble des points M plus proches de l'extrémité A du segment c'est-à-dire tel que $MA < MB$. Le demi-plan P_B est l'ensemble des points M plus proches de l'extrémité B du segment c'est-à-dire tel que $MB < MA$.

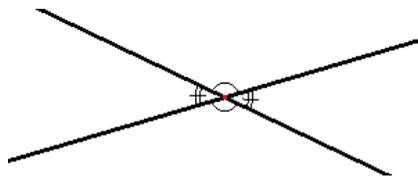


Angles et mesure

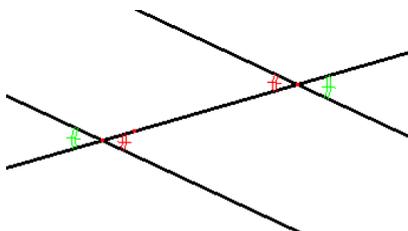
- Un angle droit mesure 90° , un angle plat mesure 180° , un angle aigu mesure moins de 90° , un angle obtus mesure entre 90° et 180° .
- Deux angles adjacents complémentaires ont un côté commun et leur somme vaut 90° .
- Deux angles adjacents supplémentaires forment un angle plat et leur somme vaut 180° .



- Deux droites sécantes définissent des angles opposés par le sommet de même mesure.



- Deux droites parallèles définissent de part et d'autre d'une sécante des angles alternes-internes de même mesure (en rouge, à l'intérieur des parallèles), des angles alternes-externes de même mesure (en vert, à l'extérieur des parallèles), et du même côté de la sécante des angles correspondants de même mesure (rouge et vert).



Triangle

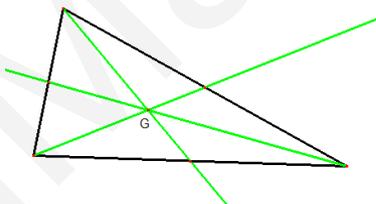
- Un triangle **équilatéral** a ses trois côtés égaux, trois angles égaux à 60° , trois axes de symétrie.
- Un triangle **isocèle** a deux côtés égaux, deux angles à la base égaux, un axe de symétrie.
- Un triangle **rectangle** a un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit est l'**hypoténuse**³, qui est son plus grand côté.
- Un triangle **rectangle isocèle** a les deux côtés de l'angle droit égaux et la mesure des deux angles à la base est de 45° .
- La somme des angles d'un triangle vaut 180° .

Définitions et propriétés des droites remarquables du triangle

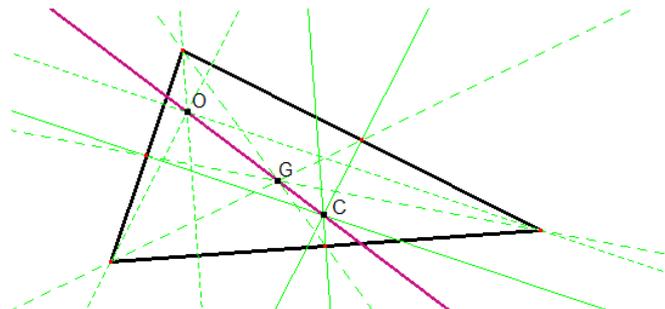
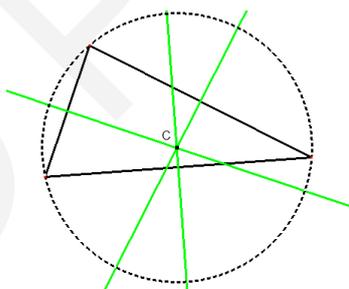
- L'**orthocentre** est le point de rencontre des trois hauteurs : une **hauteur** est la droite issue d'un sommet et perpendiculaire au côté opposé. L'orthocentre peut être extérieur au triangle. (Il faut parfois prolonger les côtés pour tracer les hauteurs).



- Le **centre de gravité** est le point de rencontre des trois médianes : une **médiane** est la droite issue d'un sommet passant par le milieu du côté opposé. Le centre de gravité d'un triangle est situé au deux tiers de chaque médiane à partir du sommet. En physique, il est le point d'équilibre du triangle.



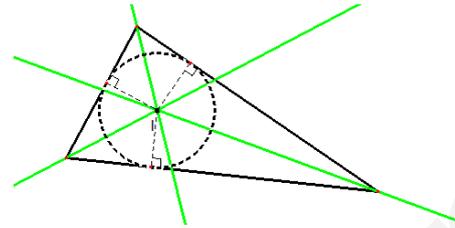
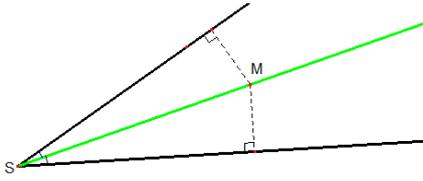
- Le **centre du cercle circonscrit** est le point d'intersection des trois médiatrices.
- La **médiatrice d'un segment** étant l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment, le centre du cercle circonscrit est équidistant des trois sommets du triangle.



- Ces trois points remarquables sont alignés sur la droite d'Euler.

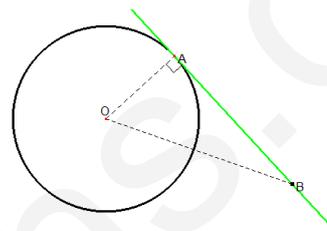
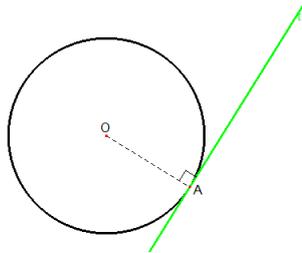
³ Attention à l'orthographe du mot HYPOTÉNUSE souvent confondu avec HYPOTHÈSE
Parimaths.com

- **Le cercle du centre inscrit** est le point d'intersection des trois bissectrices. **La bissectrice d'un angle** est l'ensemble des points équidistants des côtés de l'angle, cette distance se mesurant perpendiculairement au côté. Le centre du cercle inscrit est équidistant des trois côtés, qui sont tangents à ce cercle.



Cercle et droite

- **La tangente au cercle** (C) passant par un point A situé sur le cercle, est perpendiculaire au rayon $[OA]$.
- La tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon du cercle en son point de contact.



Angle et cercle

Un angle au centre est un angle dont le sommet est le centre du cercle. Ses côtés, demi-droites issues de O, coupent le cercle en deux points. Ces deux points déterminent sur le cercle un petit arc (*en bleu sur la figure*) et un grand arc (*en vert sur la figure*), associé respectivement l'un à l'angle au centre **saillant** (mesure inférieure à 180°), l'autre associé à l'angle au centre **rentrant** (mesure supérieure à 180°).

Un angle inscrit est un angle dont le sommet est sur le cercle. Ses côtés, demi-droites issues de ce sommet, coupent le cercle en deux points. **L'arc intercepté** est l'arc situé « à l'intérieur de l'angle ».

- **Un angle au centre** a pour mesure le double d'un angle inscrit interceptant le même arc.
- Tous les **angles inscrits** interceptant un même arc ont la même mesure.

Ainsi \widehat{AOB} est un angle au centre qui intercepte l'arc \widehat{AB} , \widehat{ASB} et \widehat{ARB} sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc \widehat{AB} . On a donc $\widehat{ASB} = \widehat{ARB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

