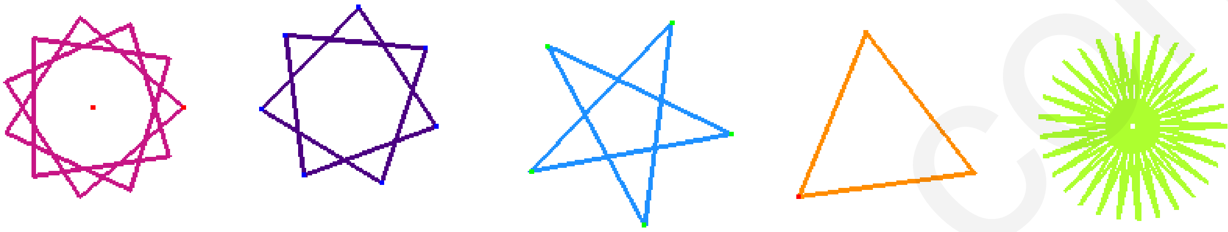
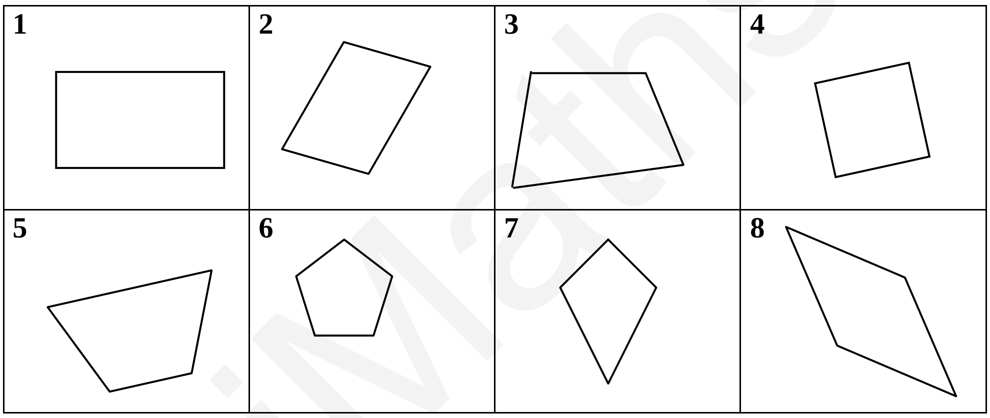
S12. Autour des POLYGONES
Quadrilatères et polygones réguliers convexes

Mise en route

1. Trouver l'intrus. Justifier.



2. Voici des polygones convexes



Lesquels sont :

- des quadrilatères ?
- des carrés ?
- des losanges ?
- des trapèzes ?
- des parallélogrammes ?
- des rectangles ?

3. Vrai ou Faux?

On suppose le quadrilatère convexe.

- Un quadrilatère qui a deux côtés parallèles est un parallélogramme
- Un quadrilatère qui a deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme
- Un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur est un carré
- Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange
- Un quadrilatère dont les diagonales ont même longueur est un rectangle
- Un quadrilatère dont les diagonales ont même milieu est un parallélogramme
- Un quadrilatère dont les diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires est un carré

4. Qui suis-je ? Trouver l'intrus.

- Un quadrilatère convexe dont les côtés opposés sont de même longueur
- Un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles
- Un quadrilatère dont les côtés consécutifs sont perpendiculaires
- Un quadrilatère dont les diagonales sont axes de symétrie
- Un quadrilatère dont les diagonales ont même milieu
- Un quadrilatère dont les diagonales sont de longueurs égales

5. Vrai ou Faux ?

Si le quadrilatère a ……………………………… alors c'est un losange

- deux côtés consécutifs ont même longueur
- les côtés consécutifs ont même longueur
- les diagonales sont perpendiculaires
- les diagonales ont même milieu
- les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur
- les diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires

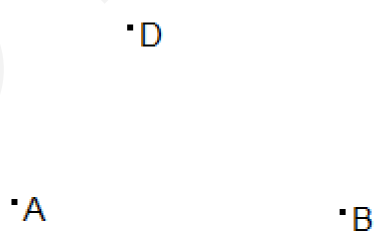
6. Vrai ou Faux ?

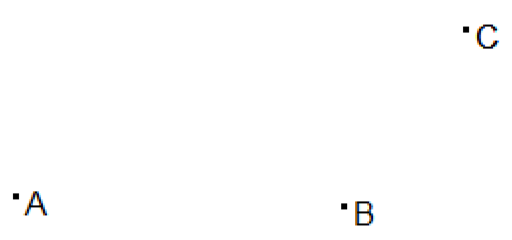
On sait que ce quadrilatère a trois côtés de même longueur…

- Il suffit qu'en plus il ait un angle droit pour que ce soit un carré
- Il suffit qu'en plus ses diagonales se coupent en leur milieu pour que ce soit un losange
- Il suffit que le quatrième côté soit de même longueur pour que ce soit un carré
- Il suffit que deux côtés soient parallèles pour que ce soit un losange.

7. Constructions

a. Dans chacun des cas ci-dessous, tracer à la règle[1] et au compas le parallélogramme ABCD (*on emploiera pour le deuxième cas une méthode différente de celle utilisée dans le premier cas*).





[1] Non graduée

b. Tracer *à la règle graduée et au compas*, un trapèze isocèle ABDC dont les bases [AB] et [CD] mesurent respectivement 4cm et 3cm.
c. Construire, *à la règle graduée et au compas* et *sans faire de calculs,* un rectangle ABCD tel que AC = 5 cm et AB = 4 cm.
d. Construire *à la règle et au compas* un quadrilatère ayant des diagonales de même longueur, qui ne soit pas un rectangle.
e. Construire *à la règle et au compas* un quadrilatère ayant des diagonales perpendiculaires et qui ne soit pas un losange.
f. Connaissant la diagonale [AC] telle que AC = 4cm, tracer un parallélogramme ABCD, puis un losange AECF, puis un rectangle AGCH, puis un carré AICJ.
g. Tracer *à la règle et au compas* un carré ayant pour côté une longueur AB donnée. Ecrire un programme de construction.
h. Tracer *à la règle et au compas* un hexagone régulier de côté une longueur AB donnée. Ecrire un programme de construction. Construire un puis un dodécagone régulier.
i. Tracer un octogone régulier. Décrire la construction.

Pour s'exercer

Exercice 1[2]

La figure sera réalisée avec soin et précision et complétée au fur et à mesure des questions

Soit un carré ABCD de 5 cm de côté. Tracer la parallèle à la droite (AC) passant par B. Soit F l'intersection de cette droite avec la droite (AD) et G son intersection avec la droite (DC). Tracer la parallèle à la droite (AC) passant par D. Soit E l'intersection de cette droite avec la droite (AB), et H son intersection avec la droite (BC).

1. Déterminez la nature du quadrilatère EFGH.

2. Soit O l'intersection des diagonales du carré ABCD. Démontrez que O est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère EFGH.

3. Soit P le symétrique de A par rapport à B, et Q le symétrique de C par rapport à B. Soit R le symétrique de C par rapport à D, et S le symétrique de A par rapport à D.

Démontrez que P, Q, R et S sont sur le cercle circonscrit au quadrilatère EFGH.

Exercice 2

ABC est un triangle tel que $\hat{A}$= 60° et $\hat{B}$= 45°. H est le pied de la hauteur issue de C. Le cercle de diamètre [AB], de centre I, coupe (AC) en L et (BC) en K ; (AK) et (BL) se coupent en O.

1. Démontrer que la droite (KI) est la médiatrice du segment [AB].

2. Démontrer que les points C, O, H sont alignés.

3. Quelle est la nature du quadrilatère IKCH ? Justifier votre réponse.

[2] 1. Amiens 2001 ; 2. G1 2006 ; 3. Orléans 99 ; 4. Aix-Marseille 1997

4. On considère le segment [AB] suivant :

Reproduire ce segment sur votre copie. À partir de ce segment [AB] et en utilisant uniquement la règle et le compas, terminer la construction d'un triangle ABC tel que $\hat{A}$= 60° et $\hat{B}$= 45°.

Laisser apparents tous les traits de construction.

Exercice 3

Soit ABCD un parallélogramme de centre O et d_1 et d_2 deux droites parallèles qui passent respectivement par A et C. Les droites d_1 et d_2 coupent respectivement la droite (BD) en M et N.

1. Préciser la nature du quadrilatère AMCN. Justifier la réponse.
2. Prouver qu'il existe une position des droites d_1 et d_2 pour laquelle AMCN est un rectangle. Donner, dans ce cas, le programme de construction du rectangle AMCN.

Le construire dans deux cas : 1er cas : AC < BD   2ème cas : AC > BD

3. Le quadrilatère AMCN peut-il être un losange ? Pourquoi ? Modifier les données de l'énoncé pour que le quadrilatère AMCN soit un losange.

Exercice 4

Soit A et E deux points donnés. On se propose d'étudier la famille f des parallélogrammes admettant A comme sommet et E comme centre.

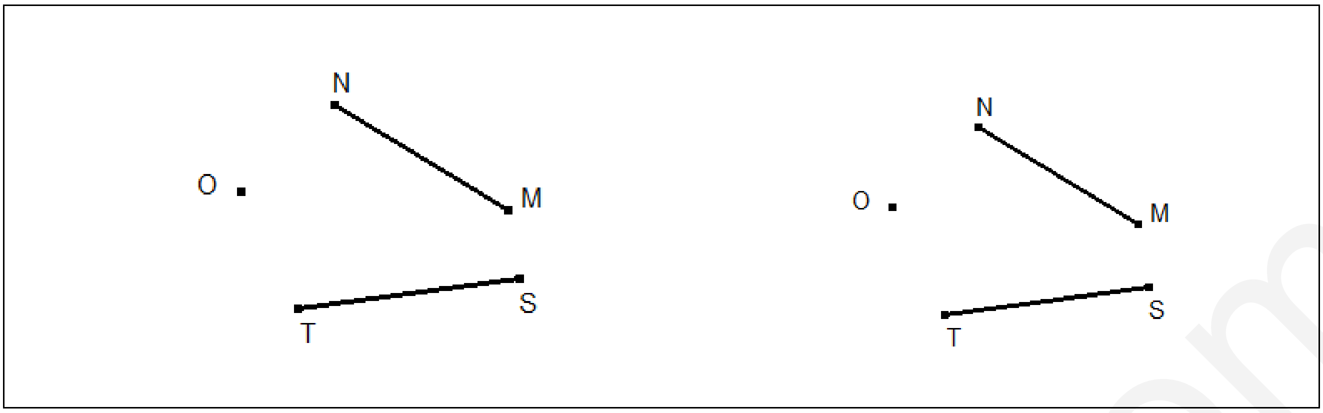
1. Construire un parallélogramme quelconque de cette famille. Rédiger un programme de construction.
2. Construire un rectangle AB'CD' de la famille f. Montrer que les sommets des rectangles de la famille sont situés sur le cercle de centre E et de rayon EA.
3. On considère les losanges de la famille f, de diagonale [AC]. Où sont situés les autres sommets de ces losanges ?
4. Cette famille contient-elle un ou plusieurs carrés ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5

Pour tout l'exercice, les constructions seront faites en utilisant la règle non graduée et le compas. On laissera apparents les traits de construction

On veut construire un quadrilatère convexe ABCD tel que :

- les points M et N appartiennent au côté [AB]
- les points S et T appartiennent au côté [BC]
- le point O soit à l'intérieur du quadrilatère et appartienne à l'une de ses diagonales.



1. En respectant ces contraintes, construire :

   a. Un parallélogramme non rectangle, non losange ABCD.

   b. Un losange ABCD.

2. Pour chacun de ces quadrilatères, préciser le programme de construction mis en œuvre.

3. Sur quelles propriétés des figures (parallélogramme, losange) s'appuient ces constructions ?

Exercice 6

Soit O un point du plan et (C) un cercle de centre O.

1. Expliquer et justifier comment construire à la règle et au compas un carré ABCD inscrit dans (C). Effectuer la construction sur une feuille blanche.

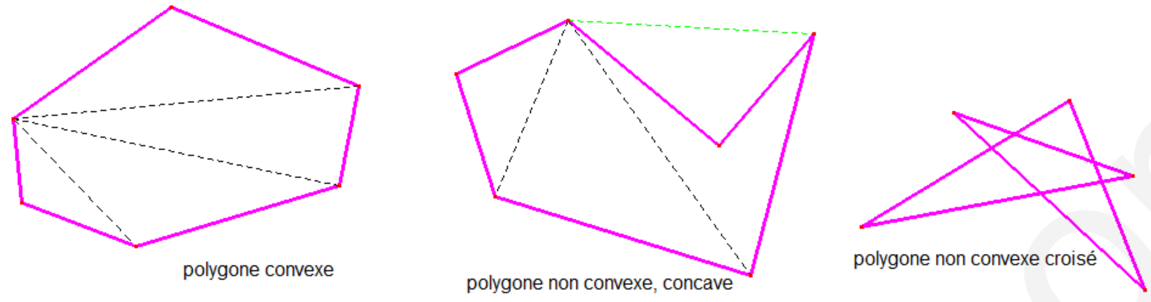
2. Expliquer et justifier comment construire à la règle et au compas un triangle équilatéral ABC inscrit dans (C). La construction sera effectuée sur une feuille blanche.

3. Dans le cas de la question 2, soient A', B', C' les symétriques respectifs de A, B, C par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. Démontrer que le triangle A'B'C' est équilatéral et que les points A, B et C sont les milieux de ses côtés.

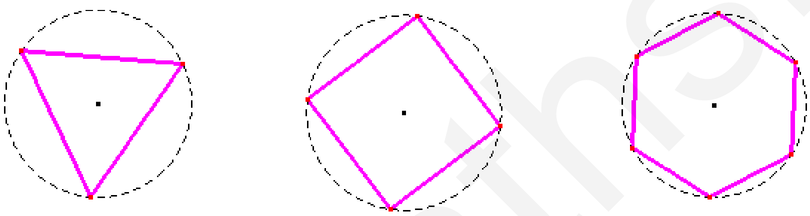
4. Que peut-on conclure pour le cercle (C) ?

☞ **A retenir**

On appelle **polygone**, une ligne brisée fermée. Chaque segment représente un côté du polygone. Un polygone est convexe quand on peut joindre deux sommets quelconques « sans sortir de la surface intérieure délimitée par ce polygone ».

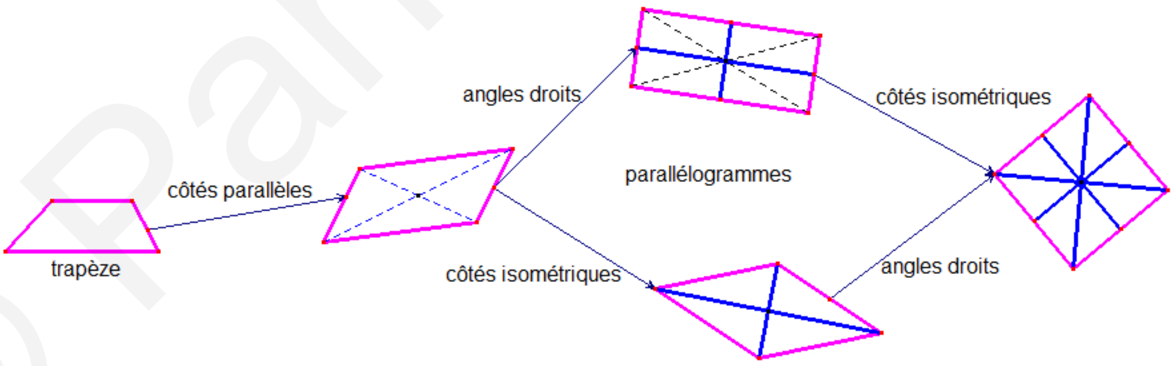


Un polygone régulier est un polygone inscriptible dans un cercle et dont les côtés ont tous la même longueur. Le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone régulier sont des polygones réguliers respectivement à trois, quatre, six côtés.



Triangles, quadrilatères, pentagones, hexagones, octogones, décagones, dodécagones ont respectivement 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 côtés.

Les polygones à 4 côtés sont les quadrilatères. Certains ont des caractéristiques particulières, comme les trapèzes et les parallélogrammes. Les rectangles, les losanges, les carrés sont des parallélogrammes particuliers.



Dans les démonstrations où l'on connaît la nature d'un quadrilatère, on choisira parmi les propriétés caractéristiques celles qui sont en adéquation avec le questionnement sans tout lister à chaque fois :

↘Si un quadrilatère est un trapèze, il a deux côtés opposés parallèles.

Si un quadrilatère est un parallélogramme, il a ses côtés opposés parallèles, ses côtés opposés de même longueur, ses diagonales qui se coupent en leur milieu qui est le centre de symétrie de la figure.

Si un quadrilatère est un losange, c'est un parallélogramme ; il a donc ses côtés opposés parallèles, ses diagonales qui se coupent en leur milieu. De plus tous ses côtés sont de même longueur et ses diagonales sont perpendiculaires. Les diagonales du losange sont axes de symétrie de la figure. Leur point d'intersection est centre de symétrie du losange.

Si un quadrilatère est un rectangle, c'est un parallélogramme ; il a donc ses côtés opposés parallèles, ses côtés opposés de même longueur, ses diagonales qui se coupent en leur milieu. De plus il a ses côtés consécutifs perpendiculaires et ses diagonales de même longueur. Attention, les diagonales ne sont pas axes de symétrie du rectangle. Les médianes qui joignent les milieux de deux côtés opposés sont elles, axes de symétrie. Leur point d'intersection, qui est aussi le point de rencontre des diagonales, est centre de symétrie du rectangle.

Si un quadrilatère est un carré, c'est un parallélogramme, un rectangle et un losange particuliers ; il a donc ses côtés opposés parallèles, ses côtés consécutifs perpendiculaires, tous ses côtés de même longueur, ses diagonales qui se coupent en leur milieu, ses diagonales de même longueur et perpendiculaires. Leur point d'intersection est centre de symétrie, Il a quatre axes de symétrie, les diagonales et les médianes.

Dans les démonstrations où l'on doit prouver la nature d'un quadrilatère, on choisira parmi les propriétés caractéristiques celles qui sont en adéquation avec le contexte de la figure ou de l'énoncé:

↘Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.

Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur, alors c'est un carré.

Souvent pour prouver qu'un quadrilatère est un losange, rectangle ou carré, on montre d'abord que c'est un parallélogramme.

↘Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs perpendiculaires, alors c'est un rectangle.

Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.

Si un parallélogramme a deux côtés perpendiculaires et de même longueur, alors c'est un carré.

Si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur et un angle droit c'est un carré.