

S16. Autour de la PROPORTIONNALITE

Mise en route¹

Des problèmes simples à résoudre mais aussi des procédures à analyser et à caractériser.

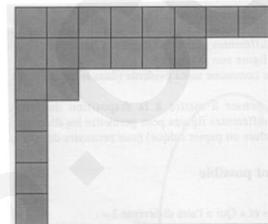
1. Je prépare de l'eau sucrée dans deux bouteilles A et B

Dans la bouteille A, je mets 4 verres d'eau et 5 morceaux de sucre. Dans la bouteille B, je mets 5 verres d'eau et 7 morceaux de sucre. Quelle est l'eau la plus sucrée ?

2. Une tablette de chocolat pèse 200g. Tu as besoin de 75g. Que prends-tu ?



Ex. 2



Ex.3

3. Voici le plan d'une pièce rectangulaire dont le sol doit être entièrement recouvert avec des carreaux identiques. S'il a fallu 3 heures pour poser les carreaux dessinés, combien de temps de travail faudra-t-il encore pour terminer l'ouvrage ?

4. Jacques est peintre en bâtiment. Il sait qu'il lui faut 5kg de peinture pour peindre un mur carré de 3m de côté. Combien de kg de peinture faudra-t-il pour peindre un mur carré de 6m de côté ?

5. Michel prépare un cocktail en mettant 6 verres de jus de tomate pour 10 verres d'eau gazeuse. Combien doit-il mettre de jus de tomates pour obtenir 24 verres de cocktail ?

6. Deux familles ont passé des vacances en pension dans le même hôtel avec les mêmes prestations. Les Dupont sont restés 4 jours, ils ont payé 500 euros pour trois personnes. Les Durand sont quatre, ils ont payé 860 euros pour 5 jours. Ils ont un doute sur leur facture : y a-t-il une erreur ?

7. On diminue l'arête d'un cube de 50%. Quel est le pourcentage de réduction du volume de ce cube ?

8. Le prix d'une course de taxi comprend la prise en charge et le prix des kilomètres parcourus qui est proportionnel au nombre de kilomètres. Le montant d'une course est de 20€ pour 10 km et de 29€ pour 16km. Combien coûte une course pour 20 km?

9. La petite veste de vos rêves est vendue 220 euros avant Noël. Elle est soldée à 143 euros. Quel est le montant de la promotion, en pourcentage, au moment des soldes.

10. En Octobre, la location d'un gîte est à 250€ la semaine. Aux vacances de Noël, elle augmente de 30% puis baisse à nouveau de 30% en Avril. Quel sera alors le montant de la location ?

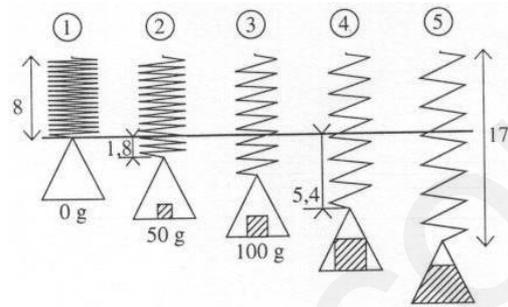
¹ IREM Grenoble Spécial Point de départ – Documents F. Boule
Parimaths.com

Pour s'exercer

1. Voici 5 ressorts auquel on a suspendu différentes masses.

Les longueurs sont en centimètres et les masses en grammes. En observant ces schémas et sachant que "l'allongement d'un ressort est proportionnel à la masse de l'objet qu'on lui suspend", complète ce tableau:

ressort n°	1	2	3	4	5
		50			
		1,8			
					17



On désigne par L la longueur totale du ressort et par m la masse suspendue. Trois élèves proposent les relations suivantes: $L = 0,036 m$ $L = 0,036 m + 8$ $L = (m : 0,036) + 8$

Qu'en penses-tu? La longueur du ressort est-elle proportionnelle à la masse suspendue?

2. Un peintre dispose de 20 litres de peinture blanche, 8 litres de peinture bleue et 10 litres de peinture jaune. Il fait un premier mélange avec 6 litres de peinture blanche, 3 litres de peinture bleue et 4 litres de peinture jaune. Il l'utilise complètement et veut refaire la même teinte, avec les mêmes proportions et en employant tout ou partie de ce qui lui reste. Calculer la quantité maximale qu'il peut obtenir pour ce second mélange et précisez la quantité utilisée pour chacune des trois couleurs.

3. Trois associés Pierre Paul et Jeanne ont respectivement apporté 30000€, 43200€ et 46800€ pour créer une entreprise. Cette année, l'entreprise a réalisé un bénéfice de 90000€. Calculer la part de bénéfice de chaque associé, proportionnellement aux parts investies.

4. Le sas d'une écluse a la forme d'un pavé droit d'une longueur de 125m et d'une largeur de 12m.

La différence entre les deux biefs est 7m. Le remplissage du sas dure 6min.

Quel est en m^3 , le volume d'eau admise dans le sas ? Quel est le débit d'admission de l'eau, en $l \cdot s^{-1}$?

5. Un cycliste parcourt un même trajet à l'aller et au retour sans s'arrêter. Sa vitesse est 20 km/h en montée et 40 km/h en descente. L'aller se compose d'une montée et d'une descente dont la longueur est deux fois plus courte que celle de la montée.

1. Calculez sa vitesse moyenne sur le parcours aller.
2. Calculez sa vitesse moyenne sur le parcours retour.
3. Calculez sa vitesse moyenne sur le parcours aller-retour.

☞ A retenir²

La proportionnalité se rencontre dans différents cadres. Elle est fréquente dans beaucoup de problèmes de la vie courante et il y a souvent plusieurs procédures pour résoudre un même problème. Ces différentes procédures s'appuient sur les propriétés de la **fonction linéaire** qui traduit la **relation de proportionnalité entre deux grandeurs**³.

Ainsi, si dans la vie courante, on sait que le prix d'un carnet de timbres est de 5,80€, le prix de trois, dix, vingt carnets sera respectivement trois, dix, vingt fois plus. On dit que le prix payé est proportionnel au nombre de carnets achetés. Les deux grandeurs en relation sont le nombre de carnets achetés et le prix payé.

Qu'est-ce qu'une fonction linéaire ?

Soit a un nombre réel fixé. En associant à chaque nombre réel x un nombre défini par $a \times x$, noté $a x$ et appelé « image de x », on définit **une fonction linéaire de coefficient a** .

On notera cette fonction ainsi $f: x \longmapsto a x$. **L'image de x** est notée $f(x) = a x$. *On dira aussi que x est l'antécédent de $f(x)$* . La fonction linéaire traduit la relation de proportionnalité entre les deux grandeurs représentées par x et $f(x)$.

Dans l'exemple des carnets de timbres, on peut alors généraliser et exprimer le prix payé P en fonction du nombre x de carnets achetés sous la forme $P(x) = 5,8x$. Le coefficient de proportionnalité $\times 5,8$ permet de calculer le prix pour un nombre donné de carnets. Ainsi on paiera pour trois carnets $P(3) = 3 \times 5,8 = 17,4$ €, pour dix carnets : $P(10) = 10 \times 5,8 = 58$ €.

Compte tenu de cette définition, on retiendra deux propriétés de linéarité, **la linéarité additive et la linéarité multiplicative**. Ainsi pour tous réels x , y et k :

- d'une part $f(x + y) = f(x) + f(y)$ car $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.
- d'autre part $f(kx) = k \times f(x)$ car $f(kx) = a \times kx = a \times k \times x = k \times ax = k \times f(x)$

Ces propriétés permettent de trouver par exemple, le prix de cinquante carnets : $P(50) = P(5 \times 10) = 5 \times P(10) = 290$ €, ou encore le prix de sept carnets : $P(7) = P(10) - P(3) = 58 - 17,40 = 40,60$ €.

Les contextes de vie courante

Souvent dans ces situations, la proportionnalité est implicite du fait de son usage fréquent.

- **Les mesures** de prix, de longueur, de masse, de temps, d'aires, de volumes... y compris les **conversions entre unités de mesure**.

➤ On veillera surtout aux conversions des **unités de temps** qui ne fonctionnent pas dans le système décimal.

Ainsi, $1h = 60min = 3600s$. Si la conversion de $2h45min$ en minutes ($120 + 45 = 165min$) ou en secondes ($165 \times 60 = 9900s$) ne pose en général pas de problème, il n'en est pas de même quand le résultat d'une résolution de problème donne par exemple une durée exprimée sous la forme $3,15h$. Fréquemment, le résultat **faux** donné est $3h15min$, oubliant la proportionnalité : « si $1h$ vaut $60min$, alors $0,15h$ vaut $0,15 \times 60 = 9$ minutes. Le résultat est donc $3,15h = 3h + 0,15h = 3h09min$

² Voir M5 Proportionnalité

³ Voir S14 fonctions linéaires et affines

Les échelles

Une échelle couramment présentée sous la forme fractionnaire, par exemple $\frac{1}{100000}$ fait le lien entre deux grandeurs de même nature, deux mesures de longueur. L'échelle s'applique comme un opérateur « multiplicatif » liant une longueur réelle et la longueur associée dans un agrandissement ou une réduction.

Ainsi si une carte est à l'échelle $\frac{1}{100000}$, cela signifie $D_{réelle} \times \frac{1}{100000} = D_{carte}$ ou inversement $D_{carte} \times 100000 = D_{réelle}$.

Une distance de 50 km entre deux villes est alors représentée par $50 \times \frac{1}{100000} = 0,0005 km = 5 dm = 50 cm$. Inversement si deux villes sont distantes sur cette carte de 12cm, elles sont en réalité distantes de $12 \times 100000 = 1200000 cm = 12 km$

➤ On veillera à la concordance des unités.

➤ On retiendra aussi que dans un **agrandissement** ou une **réduction mathématique**, toutes les mesures de longueur de la figure sont agrandies ou réduites dans le même rapport k .

Les pourcentages

Un pourcentage, $p\%$, est une écriture de la fraction décimale $\frac{P}{100}$, qui prend sens en s'appliquant à une donnée initiale, et tient alors le rôle d'un opérateur multiplicatif $\times \frac{P}{100}$.

On dit ainsi couramment qu'une TVA est de 5,5% ce qui signifie que pour un montant de 100€, cette taxe vaut 5,5€. Cela signifie aussi que pour un montant quelconque de X€, elle se calculera par $X \times \frac{5,5}{100}$

➤ On retiendra que si une augmentation de $p\%$ d'un prix A donne un prix B, la réduction de $p\%$ du prix B ne redonnera pas A, puisque le pourcentage ne s'applique pas sur le même montant initial.

Ainsi un vêtement coûtant 250€, subissant une augmentation de 10%, voit son prix augmenté de $250 \times \frac{10}{100} = 25$ € et coûte alors

275€. Si on lui applique maintenant une réduction de 10%, celle-ci s'élève à $275 \times \frac{10}{100} = 27,5$ €, ce qui met le vêtement à un nouveau

prix de $275 - 27,5 = 247,5$ €

Les vitesses

Une vitesse est le rapport entre une distance parcourue et le temps mis à la parcourir, soit $Vitesse = \frac{Distance}{temps}$.

Il en découle deux autres relations à connaître $D = V \times t$ et $t = \frac{D}{V}$

➤ On veillera à la concordance des unités : si la vitesse est exprimée en km/h (en m/s), la distance sera exprimée en km (en m) et le temps en *heure* (en s).

➤ On retiendra aussi que la **moyenne de deux vitesses** réalisées sur deux trajets successifs est en général différente de la **vitesse moyenne** sur l'ensemble du trajet.

Ainsi un véhicule roulant pendant une heure à $80 km/h$ et deux heures à $60 km/h$ aura roulé à une vitesse moyenne d'environ $67 km/h$, et non à $70 km/h$ qui représente la moyenne des deux vitesses. En effet :

$$D_1 = V_1 \times t_1 = 80 \times 1 = 80 km \text{ et } D_2 = V_2 \times t_2 = 60 \times 2 = 120 km . \text{ D'où } V_{moyenne} = \frac{Distance}{Temps} = \frac{D_1 + D_2}{t_1 + t_2} = \frac{200}{3} \approx 67 km/h$$