S18. Autour de GRANDEURS et de leur MESURE
Longueur, Périmètre, Aire

Mise en route

I. Ces théorèmes « en acte »[1] sont-ils Vrai ou Faux ?

T1. Deux rectangles de même aire sont identiques.

T2. Deux rectangles de même aire ont même périmètre.

T3. Deux rectangles de même périmètre ont même aire.

T4. L'aire et le périmètre varient dans le même sens.

T5. Deux surfaces qui ont les mêmes côtés ont la même aire.

T6. L'aire d'un carré est proportionnelle à son côté.

II. Dans cet exercice, on dira que deux parts sont égales si elles ont la même aire.

1. On partage un gâteau rectangulaire par ses deux diagonales. Les parts sont-elles égales ?
2. On partage un gâteau rectangulaire en traçant trois segments à partir d'un même sommet : un segment vers le sommet opposé, et deux segments vers les milieux des côtés opposés (voir figure 1). Les parts sont elle égales ?

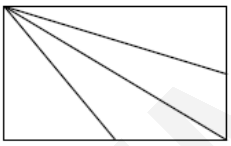


Figure 1

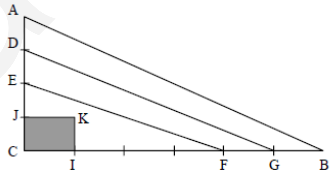


Figure 2

3. ABC est un triangle rectangle en C (figure 2). le segment [AC] est partagé en quatre segment de longueur CJ, et [CB] en six segments de longueur CI. Les polygones EFC, DGFE, ABGD ont-ils la même aire ? Justifier. On pourra utiliser l'aire du rectangle CIKJ comme unité.

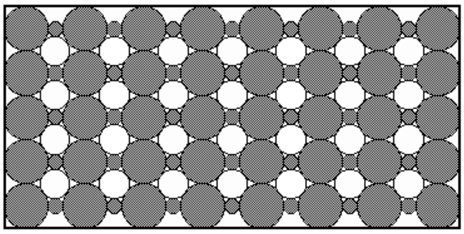
III. Soit ABCD un rectangle. On note F le milieu du segment [CD], E le milieu de [AD] et G l'intersection des droites (EC) et (FB).

1. Démontrer que l'aire du triangle DEC est le quart de l'aire du rectangle ABCD.
2. Démontrer que l'aire du quadrilatère EDFG est égale à celle du triangle BCG.

IV. En pliant une affiche rectangulaire en 4 dans le sens de la longueur et en 3 dans le sens de la largeur, on obtient un carré. Le périmètre de l'affiche dépliée est de 294 cm. Quelles sont ses dimensions ?

[1] Les élèves utilisent parfois comme des évidences des théorèmes qu'ils n'ont pas encore étudiés. On dit qu'il les utilise « en acte ». Mais prudence sur la validité de certaines de ces propriétés !

V. On trouve dans un manuel de CM2 cette représentation à propos de la multiplication.



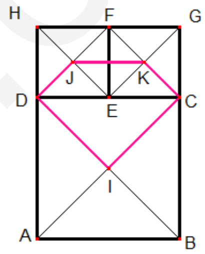
Quel rayon faut-il donner aux différents cercles si l'on veut que le rectangle mesure 15 cm sur 31 cm.

VI. Deux terrains ont le même prix de vente.

Le premier est un rectangle de largeur 26 m. Il est vendu 130 euros le mètre carré. Le second est un trapèze qui a pour hauteur 52 m, pour grande base 80 m, pour petite base 50 m. Il est vendu 110 euros le mètre carré. Calculer la longueur du premier terrain.

VII. ABCD, DEFH et ECGF sont trois carrés dans la configuration de la figure ci-contre. Leurs centres de symétrie respectifs sont notés I, J et K.

On donne : AB = 8 cm. Calculer l'aire du pentagone ICKJD.



VIII. 1. On augmente la longueur d'un rectangle de son cinquième et on diminue sa largeur de moitié.

Par quelle fraction est multipliée l'aire du rectangle ? Cette aire a-t-elle augmenté ou diminué ? De quel pourcentage ?

2. On augmente la longueur d'un rectangle de son quart, et on diminue la largeur de son quart. L'aire du rectangle est-elle modifiée ? Justifiez.

Pour s'exercer[2]

Exercice 1

MAT est un triangle tel que MA = 4,2 cm, AT = 5,6 cm, MT = 7 cm.

La formule de Héron d'Alexandrie (1er siècle après JC) permet de calculer l'aire d'un triangle connaissant *a*, *b* et *c* les longueurs des côtés et *p* le demi-périmètre du triangle.

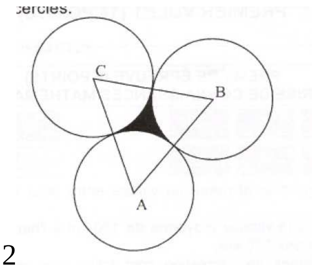
La formule est : aire $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

1. Appliquer cette formule pour calculer l'aire du triangle MAT.
2. Calculer d'une autre manière l'aire du triangle MAT.
3. O est le milieu de [MT] et S celui de [AT]. Quelle est l'aire du triangle TOS ?
4. Soit E le symétrique du point S par rapport à O. Quelle est l'aire du quadrilatère MASE ?
5. MAT et MASE ont-ils le même périmètre ? Justifier.

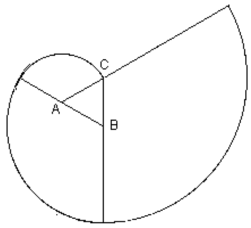
[2] Bordeaux 2004- Besançon 2005- ?- Aix-Marseille 98-2008gpe4

Exercice 2

Sur la figure ci-dessous, les points A, B, C sont les centres de trois cercles de même rayon, tangents deux à deux. Soit r le rayon de ces deux cercles. Calculer en fonction de r, l'aire de la partie noire inférieure au triangle et délimitée par ces trois cercles.



Ex. 2



Ex. 3

Exercice 3

1. La figure ci-dessus est une spirale formée par trois arcs de cercle centrés sur les sommets du triangle équilatéral (ABC) de côté a. Définir avec précision les arcs de cercle qui permettent de la tracer. Quelle fraction de chaque cercle utilise-t-on ?

2. On veut maintenant construire une spirale autour d'un carré de côté a en utilisant le même procédé. Écrire un programme de construction permettant d'obtenir cette nouvelle spirale à partir du carré (une instruction par ligne et douze instructions au plus). Exécuter un tracé (choisir la mesure du côté du carré).

3. Calculer les valeurs exactes des longueurs des deux spirales.

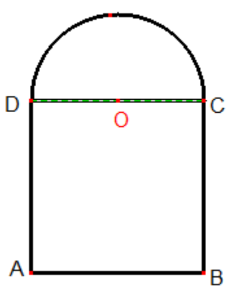
4. Quelle mesure doit-on donner au côté du carré pour que sa spirale ait la même longueur que celle construite sur un triangle équilatéral de 10 cm de côté ?

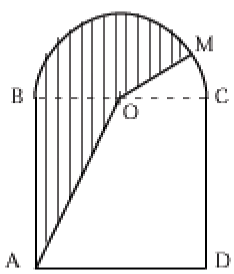
5. Conjecturer à partir des résultats de la question **3)** pour déterminer les longueurs des spirales construites sur les cinq côtés d'un pentagone régulier, puis sur les *n* côtés d'un polygone régulier.

Exercice 4

La figure F, ci-dessous à gauche, est constituée d'un demi-cercle de diamètre [BC] de centre O et de rayon 1, et des côtés [AB], [CD], [DA] du carré ABCD.

1. Calculez l'aire A de la surface S délimitée par F.





2. La figure F est la trajectoire, d'origine A, du point mobile M qui se déplace dans les sens des aiguilles d'une montre.

Le réel x désigne la distance parcourue par le point M depuis son départ de A.

On associe, à x, l'aire, notée $A(x)$, de la surface balayée par le segment [OM] pendant le déplacement de M.

Démontrez l'égalité : $A(x) = \frac{x}{2}$ dans les trois cas suivants :

a. M appartient au segment [AB]

b. M appartient au demi-cercle d'extrémités B et C.

c. M appartient au segment [CD]

3. Le point mobile M s'arrête en un point P au moment où l'aire de la surface balayée par le segment [OM] est le quart de l'aire de la surface S.

a. Calculez la distance exacte x parcourue par le point M à ce moment-là.

b. Faites une figure et placez le point P de manière précise en justifiant sa position.

Exercice 5

On considère une toile rectangulaire ABCD, de longueur 1,20m et de largeur 0,84m, sur laquelle on a tracé une croix à l'aide de deux bandes rectangulaires de largeurs respectives x et y. ces bades sont disposées perpendiculairement aux côtés du rectangle, la bande de largeur x est celle qui est perpendiculaire au segment [AB]. La croix est hachurée et la surface restante S est peinte à l'aide de trois couleurs : vert, jaune, et rouge. Cette situation est illustrée par la figure ci-dessous, qui ne respecte pas les proportions.

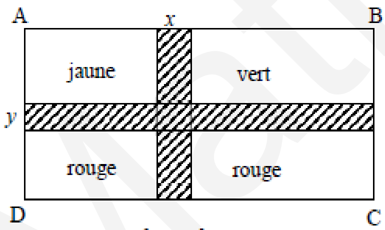


figure 1

1. Dans cette question, l'aire de la surface peinte en vert représente 35% de l'aire de la surface peinte S. L'aire de la surface peinte en jaune représente 25% de l'aire de la surface peinte S, et le rouge recouvre une surface dont l'aire est 2688cm².
2. Déterminer l'aire de la surface peinte S, en cm². Quel pourcentage de l'aire de la surface totale de la toile représente l'aire de la surface peinte S ? On donnera une valeur approchée au dixième.
3. On sait que la largeur x est égale à $\frac{1}{8}$ de la longueur AB. Déterminer x et en déduire y.
4. Dans cette question, la largeur x est égale à 12cm. On souhaite que l'aire de la surface de la croix représente entre 20% et 22% de l'aire de la surface totale de la toile, et que y s'exprime par un nombre entier de centimètres. Déterminer les valeurs possibles de y.

☞ **A retenir**

Les grandeurs[3]

Une grandeur qualifie des objets ou des phénomènes. Par exemple, la longueur qualifie des segments, des lignes polygonales, des "courbes". Nous dirons que deux segments ont "la même longueur" quand ils sont superposables. On peut aussi ranger deux segments selon leur longueur, par comparaison directe ou en utilisant un objet intermédiaire. On peut enfin additionner des longueurs c'est-à-dire considérer la longueur du segment formé de deux segments mis bout à bout. On dit que la longueur est une grandeur mesurable.

Pour mesurer la longueur L d'un segment, on choisit d'abord une grandeur-unité u et l'on cherche ensuite le nombre k tel que $L = k \times u$. Ainsi, dire qu'un segment mesure *50mm*, c'est dire que la mesure de sa longueur est égale à 50 fois l'unité étalon choisie, ici le « millimètre ».

↘ Plus généralement, pour qu'une grandeur soit mesurable, on doit pouvoir définir une relation sur les objets *dite d'équivalence*, une relation sur les grandeurs dite *d'ordre total*, une *addition* entre les grandeurs compatible avec ces relations. Pour mesurer une grandeur, on choisit d'abord une grandeur-unité u ou étalon, puis on cherche ensuite le nombre[4] k tel que $L = k \times u$

Ainsi d'autres grandeurs usuelles sont mesurables : l'aire qui qualifie des surfaces planes,… le volume qui qualifie des solides, des contenants… la durée qui qualifie des intervalles de temps … la masse qui qualifie des objets… l'angle qui qualifie des "morceaux de plans"….

Si certaines grandeurs sont mesurables, d'autres sont repérables (par des nombres) comme la température, la date, la pointure d'une chaussure ou la taille d'un vêtement. On peut les comparer *mais on ne peut pas les additionner*. D'autres enfin sont plus qualitatives et ne se prêtent ni au mesurage[5], ni au repérage. C'est le cas par exemple de la beauté d'une personne, le timbre d'une voix, la chaleur d'un groupe, l'intelligence d'un individu…

La mesure

Les hommes au fil de l'histoire ont porté un regard sur les mesures entre méfiance et nécessité en particulier pour toute opération marchande. L'homme primitif mesurait le monde en se prenant lui-même pour unité-étalon. Puis les mesures ont fait référence au corps humain : l'empan, la coudée, la brasse, le pied… avec des différences d'un individu à l'autre, et surtout aucune relation simple pour passer d'une unité à l'autre. Peu à peu, on tente d'ébaucher de systèmes cohérents, mais il faudra attendre les cahiers de doléances de 1789 pour que la voix du peuple demande l'unification des mesures et l'abolition des privilèges métrologiques des seigneurs. La réforme métrique impose alors deux choix majeurs : l'utilisation du système décimal, élément facilitateur des calculs, et le choix d'un étalon universel. L'adoption définitive du système métrique en France date de la loi du 4 juillet 1837.

---

[3] Extraits du CM présenté par A. Laur, IUFM Grenoble 2006

[4] Au besoin, au fil de l'histoire, on inventa de nouveaux nombres quand les nombres déjà connus ne suffisaient plus.

[5] Scientifique… tel qu'il a été défini !

L'assemblée nationale, considérant que pour parvenir à établir l'uniformité des poids et des mesures, conformément à son décret du 8 mai 1790, il est nécessaire de fixer une **unité de mesure naturelle et invariable**, et que le seul moyen d'étendre cette uniformité aux nations étrangères, et de les engager à convenir d'un même système de mesure, est de **choisir une unité, qui dans sa détermination, ne renferme rien d'arbitraire, ni de particulier à la situation d'aucun peuple, sur le globe** ; considérant de plus que l'unité proposée dans l'avis de l'Académie des Sciences du 19 mars de cette année, réunit toutes les conditions, a décrété et **décrète qu'elle adopte la grandeur du quart du méridien terrestre pour base du nouveau système de mesures (**Décret de l'Assemblée Nationale Constituante du 30 mars 1791)**.**

Les astronomes Méchain et Delambre mettent 6 ans (1792-98) à mesurer l'arc de méridien terrestre de Dunkerque à Barcelone (par triangulation) et le kilogramme est défini comme le poids de 1 litre d'eau à la température de 4°C. Cette unité de masse est, elle aussi, représentée sous la forme d'un étalon en platine.

Le 22 juin 1799, les deux premiers prototypes du mètre et du kilogramme sont alors déposés aux Archives de la République, en tant que modèles de référence…

En 1960, lors de la onzième conférence générale des poids et mesures, apparaît le Système International d'unités (SI) qui comprend aujourd'hui deux classes d'unités.

Les sept unités de base sont associées à sept grandeurs fondamentales : la longueur (*mètre*), la masse (*kilogramme*), le temps (*seconde*), l'intensité de courant électrique (*ampère*), la température thermodynamique (*kelvin*), l'intensité lumineuse (*candela*), la quantité de matière (*mole*).

Le mètre est défini comme la distance parcourue par la lumière dans le vide en une fraction 1/299 792 458 de seconde. (17e Conférence Générale des Poids et Mesures de 1983). Le kilogramme est la masse du prototype international de platine iridié déposé au pavillon de Breteuil à Sèvres (cylindre droit de 39 mm de diamètre et 39 mm de hauteur). (3e CGPM de 1901).

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133, non perturbé par les champs extérieurs. (13e CGPM de 1967)

Deux autres unités supplémentaires servent à mesurer les angles :

L'angle plan a pour unité le radian (rad) : "le radian est l'angle qui, ayant son sommet au centre d'un cercle, intercepte sur la circonférence de ce cercle un arc de longueur égale à celle du rayon de ce cercle". On notera que le degré et le grade se définissent à partir du radian : $\pi radians = 180 \deg rés = 200 grades$, $soit\ 1gr = \frac{200}{\pi} rad\ \ et\ 1° = \frac{180}{\pi} rad$

L'angle solide a pour unité le stéradian (sr) : "le stéradian est l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe sur la surface de cette sphère une aire équivalente à celle d'un carré dont le côté est égal au rayon de la sphère".

Les unités dérivées se déduisent de façon simple des unités de base pour mesurer des grandeurs dérivées des grandeurs de base : l'aire ou $longueur^2$ (*m²*), le volume ou $longueur^3$ (*m^3*), la vitesse ou *longueur/temps* (*m/s, noté* $m.\ s^{-1}$), la masse volumique ou *masse/volume* ($kg.\ m^{-3}$).

↘ Une mesure présente toujours une inexactitude du fait qu'elle dépend de l'instrument, de l'expérimentateur, du report d'un étalon qui lui-même comporte un certain degré d'incertitude (10^{-12} pour le mètre). La valeur obtenue n'est donc jamais une valeur exacte, on en donne en général une valeur approchée souvent comprise dans un intervalle ou en précisant le degré de précision.

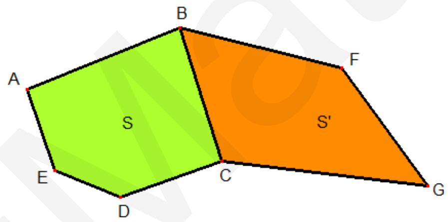
Longueur, Aire et Périmètre

L'expérience empirique nous conduit souvent à confondre les concepts de périmètre, d'aire et même parfois de volume. En effet, dans la plupart des manipulations que nous réalisons sur des objets, ces trois grandeurs croissent ou décroissent conjointement. Ainsi, plus un paquet-cadeau est gros (Volume), plus le papier-cadeau pour l'envelopper est grand (Aire) et plus le ruban nécessaire à l'entourer sera long (Périmètre). Intuitivement, nous avons tendance à penser, souvent inconsciemment, que si nous augmentons une surface, le nouveau périmètre augmente aussi et réciproquement. D'où l'utilisation erronée de certains théorèmes en actes… et la nécessité d'une étude dissociée de certains concepts, par exemple par l'exploration de situations où, à périmètre constant les aires vont varier , où, à aire constante les périmètres vont varier, où périmètre et aire vont varier dans le même sens (ce qui n'est pas surprenant) mais aussi en sens contraire (ce qui est moins conforme à l'intuition).

↘ En géométrie plane, on aura souvent recours à deux théorèmes « en acte » vrais, pour pouvoir évaluer l'aire de figures complexes à partir de celles de figures simples.

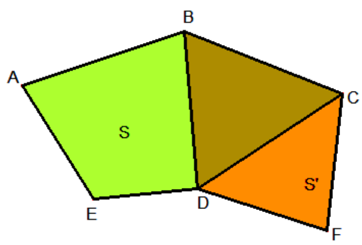
T1. Si S et S' sont deux surfaces « quasi-disjointes », $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$

L'expression 'quasi-disjointes' amène à en préciser le sens ; il s'agit ici de surfaces ayant seulement une frontière commune. Leur intersection étant alors une 'surface' d'aire nulle, l'aire de l'union de S et S'est bien égale à la somme de l'aire de S et de l'aire de S'.



Ici, S représente la surface polygonale ABCDE, S' la surface polygonale BFGC, le segment [BC] est l'intersection $S \cap S'$ de S et S', et $S \cup S'$ est la surface polygonale ABFGCDE.

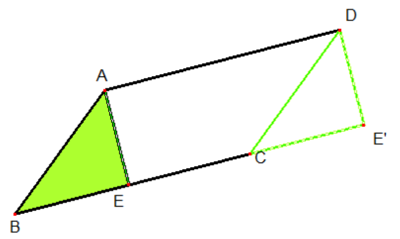
Dans un cas plus général où deux surfaces ont une surface commune $S \cap S'$, l'aire de leur union est définie par : $A(S \cup S') = A(S) + A(S') - A(S \cap S')$



Ici, S représente la surface polygonale ABCDE, S' la surface polygonale BDFC, le triangle BCD est l'intersection $S \cap S'$ de S et S', et $S \cup S'$ est la surface polygonale ABCFDE.

T2. Le "découpage-recollement" conserve l'aire

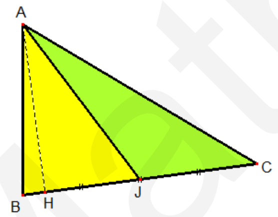
C'est une manipulation (matériellement réalisée à l'école, virtuellement ensuite) qui va permettre de conjecturer certaines égalités d'aires.



Ici on peut conjecturer que l'aire du parallélogramme ABCD est égale à l'aire du rectangle AEE'D, comme le montre le « découpage-recollement du triangle ABE. La démonstration confirme cette conjecture car les deux quadrilatères ont pour aire $AD \times AE$.

↘ On pourra aussi retenir cette propriété de la médiane du triangle. Connue comme la droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé, cette droite partage le triangle en deux triangles de même aire.

En effet, bien que les deux triangles obtenus ABJ et AJC ne soient pas isométriques, ils ont un côté de même longueur BJ=JC, et la hauteur [AH] relative à ce côté est la même.



↘ Les unités

Les unités de longueur se déduisent les unes des autres de 10 en 10, en ordre croissant ou décroissant.

Ainsi $1km = 10hm = 100dam = 1000m$ et $1m = 10dm = 100cm = 1000mm$

Par contre, les unités d'aires se déduisent les unes des autres de 100 en 100, en ordre croissant ou décroissant.

Ainsi $1km^2 = 100hm^2 = 10000dam^2 = 1000000m^2$ et $1m^2 = 100dm^2 = 10000cm^2 = 1000000mm^2$

D'autre part les unités de mesures agraires, hectare, are, centiare, fonctionnent comme les unités de longueur (on notera que les dizaines et les dixièmes d'ares ne sont pas usitées)

$1ha = 100a = 10000ca$

$1ca = 1m^2 = 1m \times 1m$ $\quad 1a = 1dam^2 = 100\ m^2 = 10m \times 10m$ $\quad 1ha = 10000\ m^2 = 100m \times 100m$

↘Agrandissement-Réduction

On retiendra que si les longueurs subissent un agrandissement (réduction) dans un rapport k, les aires associées subissent une augmentation (ou réduction) dans un rapport k^2.

Par exemple, un carré de côté c a pour aire $A = c^2$. Si l'on multiplie par k ce côté, le nouveau carré a pour côté $c' = k \times c$ et son aire mesure alors $A' = c' \times c' = k \times c \times k \times c = k^2 \times c^2 = k^2 \times A$. Son aire est bien multipliée par k^2 .