S2 Autour des BASES DE NUMERATION

Mise en route

A. Ecrire en base « dix » les nombres : trois, cinq, dix, onze, treize, vingt-huit, huit cent quarante cinq.

Comment peut-on écrire ces mêmes nombres en base « trois », c'est-à-dire en faisant des groupements – échanges de trois unités à chaque rang successif ? Les écrire ensuite en base « cinq ».

B. Ecrire en base « dix » les nombres suivants, $\overline{23}^{4}, \overline{10}^{5}, \overline{1000}^{2}, \overline{143}^{7}$ respectivement écrit en base 4, 5, 2 et 7.

C. Vrai ou faux ?

$\overline{567}^{8}$ est le nombre $5\times 800+6\times 80+7=4487$??

$\overline{10111}^{2}$ est le nombre $1\times 2^{5}+1\times 2^{3}+1\times 2^{2}+1\times 2^{1}=46$ en base 10 ??

452 s'écrit $\overline{332}^{5}$ en base 5 ??

D. Numérations anciennes[1]

En observant le tableau de gauche où, sur chaque ligne, le même nombre est écrit avec les symboles correspondant à chaque numération, vous allez compléter le Vrai/Faux du tableau de droite.

EGYPTIENNE	ROMAINE	ARABE	JAPONAISE
|||||||	VII	7	七
∩∩	XX	20	二十
||||∩∩	XXIV	24	二十四
∩∩||||||	XXVI	26	二十六
∩∩∩∩	XL	40	四十
∩∩∩∩∩∩∩ |||||	LXXV	75	七十五
|||||||| 𓍢𓍢𓍢	CCCVIII	308	三百八

			Réponses		Vrai Faux
Le nombre	||𓍢	s'écrit	200	en numération arabe.	
Le nombre	320	s'écrit	∩∩ 𓍢𓍢𓍢	en numération égyptienne.	
Le nombre	|||𓍢 ∩∩𓆼	s'écrit	312 000	en numération arabe.	
Le nombre	|||𓍢𓆼	s'écrit	1 103	en numération arabe.	
Le nombre	199	s'écrit	CIC	en numération romaine.	
Le nombre	240	s'écrit	*IICIVX*	en numération romaine.	
Le nombre	二十	s'écrit	210	en numération arabe.	
Le nombre	25	s'écrit	十十百	en numération japonaise.	
Le nombre	三千八	s'écrit	3 008	en numération arabe.	

Les principales caractéristiques de ces numérations anciennes :

En observant et en faisant si besoin quelles hypothèses, vous déterminerez les principales caractéristiques de chacune de ces numérations égyptienne, romaine, arabe, japonaise *:* quelle est leur base ? Le zéro existe-t-il ?

[1] *Source :* *http://pedagogie.ac-montpellier.fr/Disciplines/maths/pedago/college/stage_0506/villeneuve.pdf*

La position des chiffres a-t-elle une importance ? Quelles opérations fait-on pour trouver la valeur du nombre ?

Pour s'exercer[2]

Exercice 1

Soit ***n*** un nombre entier naturel strictement supérieur à 1. On considère alors les deux nombres qui s'écrivent, en base ***n*** : $\overline{11}^n$ et $\overline{111}^n$.

Par convention, en base dix, les nombres seront écrits de manière usuelle, on convient donc d'écrire : $\overline{111}^4 = 21$

1. Compléter le tableau suivant en donnant l'écriture décimale des nombres $\overline{11}^n$ et $\overline{111}^n$ pour les différentes valeurs de la base ***n*** envisagées.

	n = 2	***n*** = 3	***n*** = 4	***n*** = 5
$\overline{11}^n$				
$\overline{111}^n$			21	

2. Calculer ***n*** en sachant que : $\overline{111}^n = 73$
3. Calculer ***n*** en sachant que $\left(\overline{11}^n\right)^2 - \overline{111}^n = 5$
4. L'équation $\left(\overline{11}^n\right)^2 - \overline{111}^n = \overline{10}^n$ permet-elle de calculer la base ***n*** ? La réponse sera justifiée.

Exercice 2

Déterminer la base *a* (si elle existe) dans laquelle $\overline{113}^a = \overline{21}^a + \overline{32}^a$.

Déterminer la base *b* (si elle existe) dans laquelle $\overline{26}^b + \overline{12}^b = \overline{43}^b$.

Exercice 3

Le plus grand des nombres qui s'écrivent en base dix avec deux chiffres est 99.

1. Quelle est l'écriture en *base dix* du plus grand des nombres qui s'écrivent en base huit avec deux chiffres ?

2. Quelle est l'écriture en *base dix* du plus grand des nombres qui s'écrivent en base douze avec deux chiffres ?

3. Si n est un entier naturel strictement supérieur à 1, le plus grand des nombres qui s'écrivent en *base n* avec un seul chiffre est le nombre (*n-1*).

a. Déterminer le plus grand des nombres que l'on peut écrire en *base n* avec deux chiffres.

b. Quel est le plus petit entier n pour lequel le nombre 224 (écrit en *base dix*) s'écrira en *base n* avec deux chiffres?

[2] 2. Montpellier 94 - 3. Montpellier 97 - 5. D'après Montpellier 98

Exercice 4

1. Ecrire en *base douze* le nombre qui s'écrit 144 en base dix.
2. Ecrire en *base dix* le nombre qui s'écrit $\overline{1000}$ en base douze.
3. On désigne par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β les douze chiffres utilisés en base douze.

Ecrire en base dix les trois nombres qui s'écrivent respectivement $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta}$ en base douze, puis le produit de $\overline{\alpha}$ par $\overline{\beta}$.

Exercice 5

La numérotation *sexagésimale* (*base soixante*) exigerait l'utilisation de soixante chiffres distincts ! En pratique, on décide d'écrire chacun de ces chiffres en utilisant le codage en base dix du nombre qu'il représente, et en l'écrivant entre parenthèses. Par exemple, (2) (19) (51) est l'écriture sexagésimale du nombre qui s'écrit 8391 en base dix. En effet $8391 = 2\times3600 + 19\times60 + 51$.

1. Ecrire en base dix le nombre dont l'écriture sexagésimale est (3) (0) (17) (48).
2. Trouver l'écriture sexagésimale du nombre qui s'écrit 54 325 432 en base dix.

☞ **A retenir**

Nous avons vu en S1 que **la numération décimale** est construite sur une **base « dix »** c'est-à-dire sur des **groupements échanges de dix unités**. Ainsi dès qu'on a atteint dix unités dans un rang, on peut les grouper pour fabriquer une unité du rang supérieur : dix unités = 1dizaine, dix dizaines = 1centaine……

Le nombre $\overline{mcdu}$ se décompose sous la forme $m\times10^3 + c\times10^2 + d\times10^1 + u\times10^0$, appelée « décomposition canonique » du nombre.

Dans les autres **bases de numération**, le principe est le même. Ainsi dans une base *n*, il faut *n* unités d'un rang pour obtenir une unité du rang supérieur. On utilisera alors *n* « chiffres » pour écrire les nombres.
Ainsi en base 3, les nombres vont s'écrire avec les chiffres 0, 1 et 2. En base 12, il faudra 12 symboles pour écrire des nombres: on prend donc 0, 1, 2, 3, …..9 et α , β par exemple.

La décomposition canonique d'un nombre $\overline{abcd}^{\,n}$ en **base *n*** est alors : $\overline{abcd}^{\,n} = a\times n^3 + b\times n^2 + c\times n^1 + d\times n^0$

Le nombre 4123 se lit *quatre mille cent vingt trois* en base 'dix' ; sa valeur est $4\times10^3 + 1\times10^2 + 2\times10^1 + 3\times10^0$.

Le nombre $\overline{4123}^{\,5}$ se lit '*quatre un deux trois'* en base 'cinq' ; sa décomposition est alors $4\times5^3 + 1\times5^2 + 2\times5 + 3$, d'où sa valeur 538 en base dix[3].

➘ Ne pas confondre l'indication de la base et l'écriture 'exposant' d'une puissance

$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$ et $\overline{2}^{\,5} = 2$ *en base* 5

---

[3] Voir méthode sur M1