S23. Autour des CUBES et POLYEDRES
Géométrie dans l'espace

Mise en route

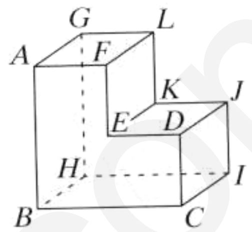
A. Observer

Vrai ou Faux ? Soit le prisme formé de trois cubes accolés:
$(BE)\perp(EK)$? $(BG)//(CJ)$? $AL=DK$?

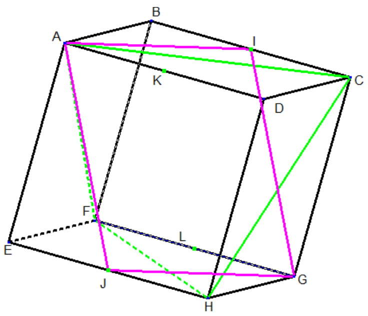
Les plans (AGL) et (EFK) sont-ils sécants ?

Quelle est l'intersection des plans (ABH) et (JKL) ?

Quel est le point d'intersection de la droite (GK) et du plan (CDJ) ?



B. Voir et reconnaître des formes planes dans une représentation en perspective[1]



On considère le cube ABCDEFGH de côté *4cm*. I, J, K, L sont les milieux respectifs de [BC], [EH], [AD], [FG].

1. Le point D appartient-il au segment [IG] ? Expliquer.

2. Justifier que $AC=CH=HF=FA$. Peut-on en déduire que ACHF est un losange ? Expliquer.

3*a*. Démontrer que les quadrilatères AICK, CKJG, AIGJ sont des parallélogrammes.

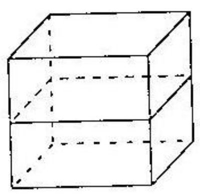
b. Démontrer que le quadrilatère AIGJ est un losange.

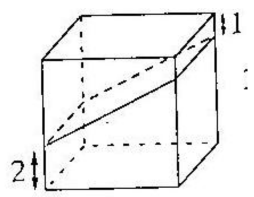
c. Le quadrilatère AIGJ est –il un carré ?

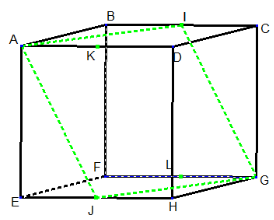
C. Voir et représenter en vraie grandeur la section d'un cube par un plan

ABCDEFGH est une représentation d'un cube en perspective. I, J, K, L sont les milieux respectifs des arêtes [BC], [EH], [AD], [FG]. Ce cube est sectionné par un plan. Trois cas sont représentés ci-dessous.

Construire les sections ci-dessous en vraie grandeur sachant que le cube a pour arête 4cm. On précisera la forme de ces sections.







[1] D'après Aix 2004

D. Faire des calculs de mesure[2]

I. On sectionne un coin du cube par un plan, on obtient ce solide.

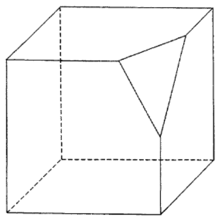


fig.1

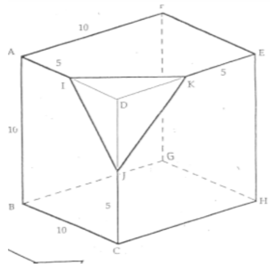


fig.2

1. On découpe ainsi les huit coins du cube, les faces triangulaires ne se touchent pas ni ne se recoupent (*fig.1*). On obtient ainsi un solide à 14 faces. En appelant F le nombre de faces $F = 14$.

   a. Préciser le nombre de sommets S et le nombre d'arêtes C.

   b. Vérifier que $S - C + F = 2$.

2. On découpe de la même façon les huit coins du cube de départ par des plans passant par le milieu des arêtes (*fig.2*). Le volume total des huit morceaux découpé est-il égal au volume du solide restant ? Justifier (on nommera *a* l'arête du cube).

Ou encore…

II. On considère un cube ABCDEFGH, d'arête *4cm*.

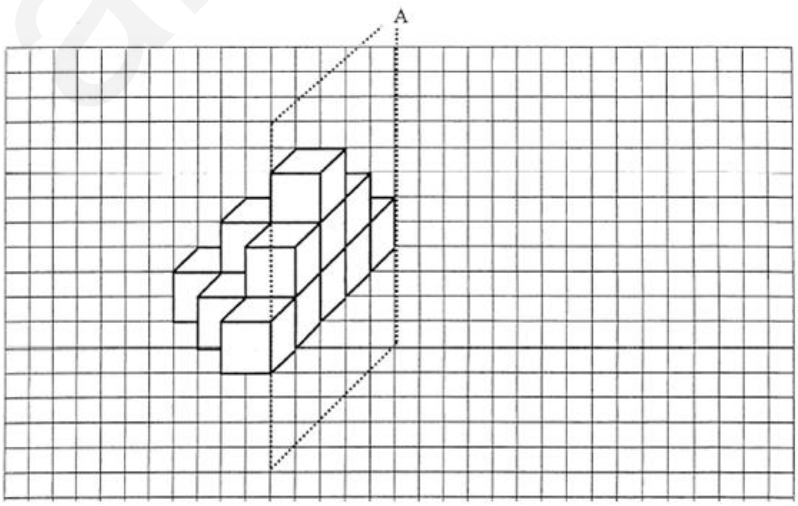
a. Dessiner le cube et tracer la pyramide obtenue en joignant le sommet G à chaque sommet du carré ABFE.

b. Donner la valeur exacte de la longueur des différentes arêtes de cette pyramide.

c. Calculer son volume.

E. Représenter en perspective cavalière

Compléter cette figure en réalisant une symétrie par rapport au plan A.



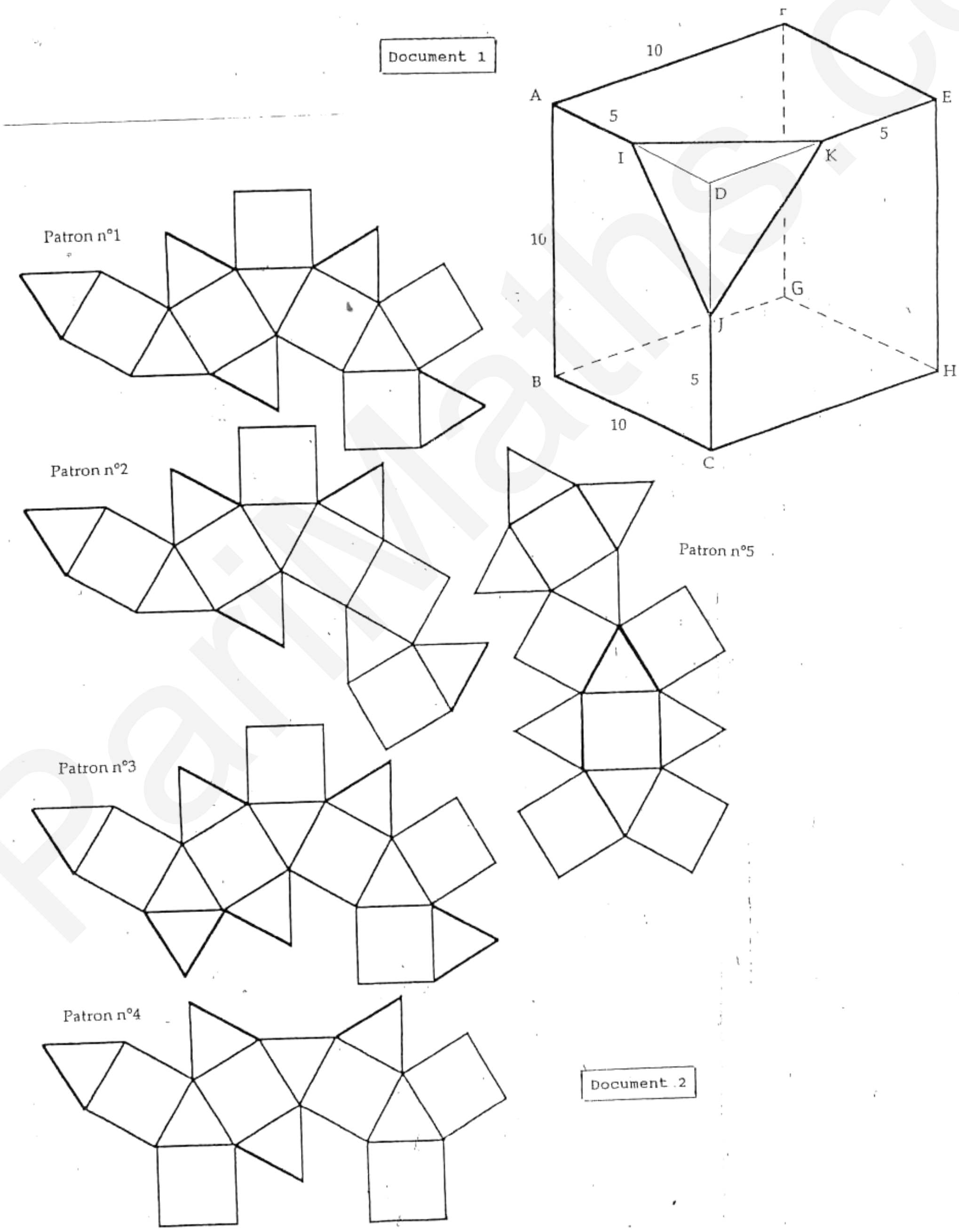
[2] D'après Rennes 2002

F. Choisir ou réaliser un patron

Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, I est le milieu de [AD], J est le milieu de [CD] et K est le milieu de [ED]. On peut, à partir des huit sommets du cube initial, former huit pyramides identiques à la pyramide IDJK. On les enlève et on obtient alors un solide appelé « cuboctaèdre ».

L désigne le milieu de [BC] et M est le milieu de [AB].

- Quelle est la nature de la face IJLM ?
- Parmi les cinq figures proposées, indiquer les trois qui ne sont pas des patrons du cuboctaèdre.



G. Passer de la représentation en perspective au patron[3]

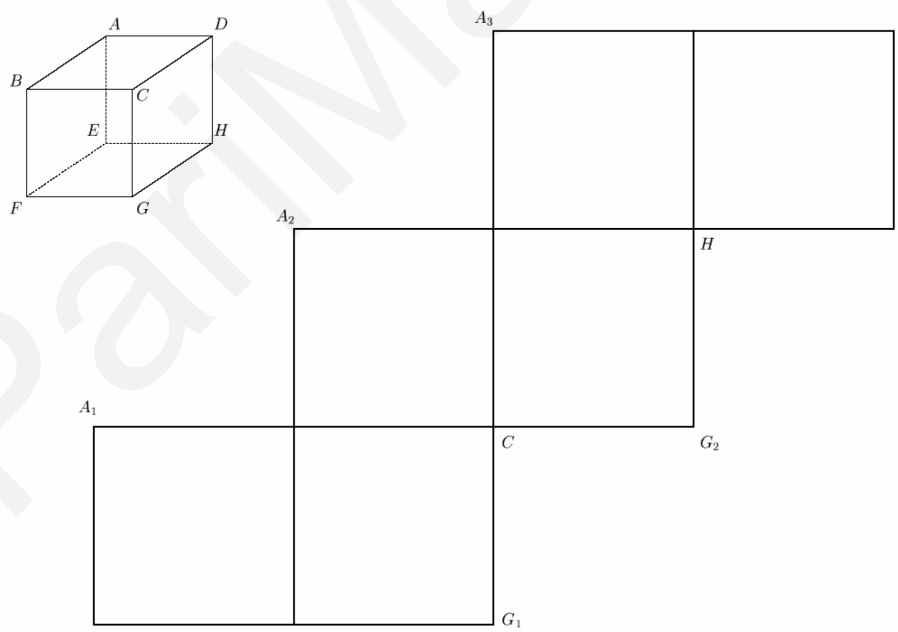
On fixe un cube ABCDEFGH d'arête 1. Une représentation en perspective cavalière et un patron sont donnés ci-dessous. Par exemple le sommet A du cube est représenté par les trois points A_1, A_2, A_3 sur le patron.

On appelle « distance » entre deux points M et N de la surface du cube, la longueur du plus court chemin tracé sur la surface du cube et qui relie ces deux points. Pour ne pas confondre la « distance » avec la distance usuelle, on la notera $d(M,N)$. Par exemple la distance de G à C est 1 car le plus court chemin qui les relie est l'arête [GC]. En revanche, la « distance » de G à A est strictement plus grande que la longueur usuelle de la diagonale [AG] du cube (voir question 4.)

1. Compléter le patron en nommant tous les sommets du cube. On ne demande pas de justifier.
2. *a*. Tracer en rouge sur ce patron l'ensemble des points qui représentent des points de la ligne brisée *ACG* (réunion des segments [AC] et [CG]).

   b. Calculer la longueur l_{AG} de la ligne brisée *ACG*.
3. *a*. Parmi les chemins qui relient les sommets A et G et qui sont totalement contenus dans les faces ABCD et CDHG, on considère le plus court. Le tracer en bleu sur le patron, puis sur le cube en perspective, en justifiant chaque étape de la construction.

   b. Quelle est la longueur de ce chemin ?



[3] D'après Lyon 2004

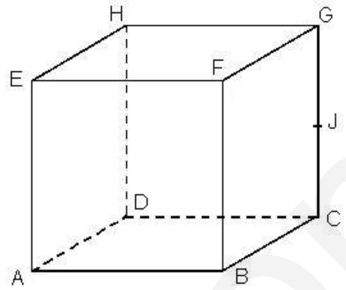
Pour s'exercer[4]

Exercice 1

La figure ci-contre représente un cube de *10 cm* d'arête.

A. Le point J est le milieu du segment [CG].

Reproduire sur votre copie le tableau ci-dessous et le compléter en répondant par *oui* ou par *non*. Vous justifierez rapidement vos réponses.



Le triangle ... est-il…	rectangle?	isocèle?	équilatéral?
DJH			
ACG			
AFC			
EHG			

B. On considère que la figure ci-dessus représente un cube en bois de *10 cm* d'arête. On le partage en deux morceaux à l'aide d'une scie, que l'on suppose sans épaisseur réalisant une coupe plane passant par les trois points R, S et T définis ainsi : le point R est à *6 cm* du sommet E sur l'arête [EH], le point S est à *3 cm* du sommet E sur l'arête [EA], le point T est à *6 cm* du sommet E sur l'arête [EF].

On applique une des deux surfaces obtenues sur un tampon encreur et on imprime cette section RST sur une feuille.

1. Sans faire de calculs, dessiner en taille réelle à la règle et au compas, le contour de la surface imprimée. On utilisera des constructions géométriques annexes qu'on fera figurer sur la copie.

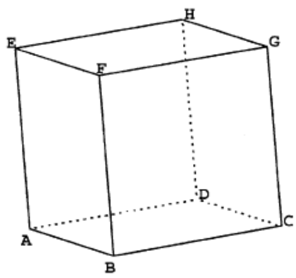
2. Calculer la mesure exacte de la longueur du segment [TR].

3. Calculer l'aire exacte en cm^2 de la section obtenue.

Exercice 2

Soit le cube ci-dessous d'arête *a*. En coupant ce cube suivant le plan (BED) on obtient deux polyèdres.

L'exercice ne concerne que le polyèdre ne contenant pas le sommet A.



[4] D'après Bordeaux 99 ; Aix 2002 ; Corse 1998 ; Bordeaux 2004

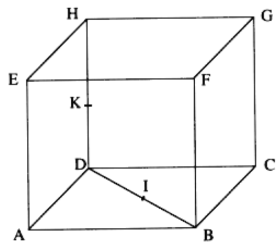
1. Donner le nombre d'arêtes et le nombre de sommets de ce polyèdre.

2. Nommer chacune des faces de ce polyèdre en précisant sa nature géométrique particulière éventuelle. Justifier.

3. Calculer le volume de ce polyèdre. *Rappel du volume de la pyramide :* $\frac{aire\ \ de\ \ la\ \ base \times hauteur}{3}$

Exercice 3

ABCDEFGH est un cube dont l'arête a pour longueur *6 cm.* K est le milieu de [DH] et I celui de [DB].



1. Quelle est la nature du triangle HBC ? Justifier votre réponse.

2. On étudie le triangle HDB.

a. Calculer les mesures exactes des longueurs DB et HB. Justifier vos calculs.

b. Démontrer que les droites (KI) et (HB) sont parallèles. En déduire la mesure de la longueur KI.

c. Dessiner le triangle HDB en vraie grandeur. Rédiger le programme de votre construction.

3. On considère la pyramide de sommet H ayant pour base le triangle BCD.

a. Dessiner un patron de cette pyramide à l'échelle 1/2.

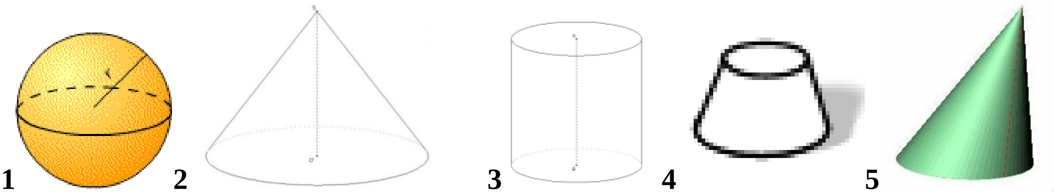
b. Calculer le volume de cette pyramide.

....

☞ **A retenir**

Les solides de l'espace

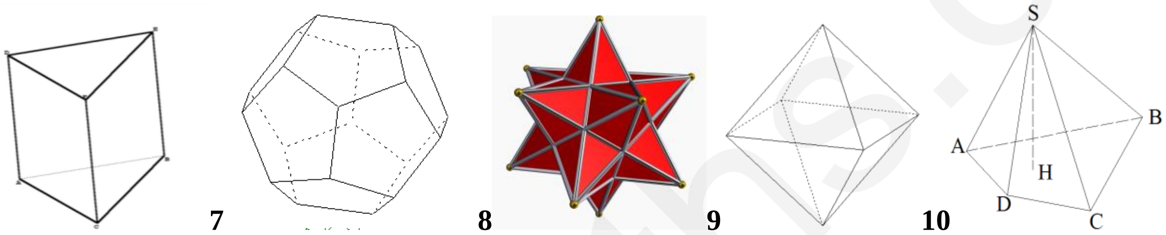
Parmi les solides de l'espace, on peut définir deux familles, les polyèdres et ceux qui ne le sont pas. A l'école, ces derniers sont souvent associés aux « *solides qui peuvent rouler* »[5].



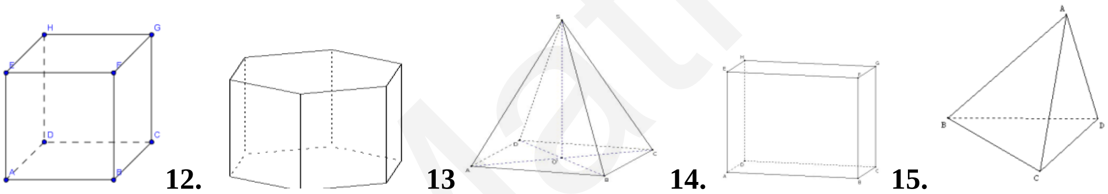
1 2 3 4 5

Parmi eux, une boule (1), un cône de révolution (2), un cylindre de révolution (3), un tronc de cône(4), un cône penché (5).

☞ **Un polyèdre** est un solide dont toutes les faces sont des polygones, donc des faces planes. Les **arêtes** du polyèdre sont les côtés des faces, les **sommets** du polyèdre sont les sommets des faces.



6 7 8 9 10



11 12. 13 14. 15.

Sont représentés ci-dessus des prismes droits (6, 11, 12, 14), des pyramides (10, 13, 15), une bipyramide (9), un dodécaèdre (7), un polyèdre étoilé (8).

Un polyèdre est régulier quand toutes ses faces sont des polygones réguliers. Ainsi le cube (11) et le prisme hexagonal à faces carrées (12) sont des polyèdres réguliers[6].

↘ **Le prisme droit** est un polyèdre qui a deux faces superposables et parallèles, appelées les bases, les autres faces étant des rectangles, appelées faces latérales. Les bases sont des polygones quelconques. Dans le prisme triangulaire (6), les bases sont deux triangles isométriques et les faces latérales sont des rectangles ; dans le prisme hexagonal (12), les bases sont deux hexagones réguliers isométriques et les faces latérales sont des carrés. Les arêtes qui appartiennent seulement aux faces latérales sont orthogonales aux bases.

Cas particulier de prisme droit

Le parallélépipède rectangle ou pavé droit (14) est un prisme droit dont toutes les faces sont des rectangles. Il a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes. Parmi les parallélépipèdes rectangles, **le cube** (11) est un prisme droit dont toutes les faces sont des carrés.

[5] Voir S24

[6] En géométrie dans l'espace, seul le texte de l'énoncé accompagnant la représentation perspective permet de connaître les propriétés réelles de la figure.

↘ **La pyramide** est un polyèdre dont une face est un polygone, appelée base, et dont les toutes autres faces, appelées faces latérales, sont des triangles qui ont un sommet commun, appelé sommet de la pyramide. La hauteur de la pyramide est le segment orthogonal à la base dont une des extrémités est le sommet de la pyramide et dont l'autre extrémité appartient à la base.

La pyramide (10) est quelconque. Si la pyramide (13) a pour base un carré et si sa hauteur coupe la base en son centre, elle a alors des faces latérales qui sont des triangles isocèles.

Cas particulier de pyramide

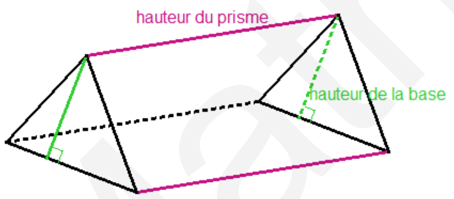
Le tétraèdre (15) est une pyramide dont toutes les faces sont des triangles. Il a 4 faces, 4 sommets, 6 arêtes. Quand toutes les faces sont des triangles équilatéraux, on dit que le tétraèdre est régulier.

☞ **Aires et volumes**[7]

↘L'aire d'un polyèdre est la somme des aires de toutes ses faces.

↘Le volume d'un prisme droit est égal à : $V_{prisme} = A_{base} \times h$, A représentant l'aire de la base et h la hauteur.

Il faudra veiller à bien choisir la hauteur en tenant compte des caractéristiques du solide et non la position de celui-ci. La hauteur est le segment perpendiculaire aux deux bases du prisme.



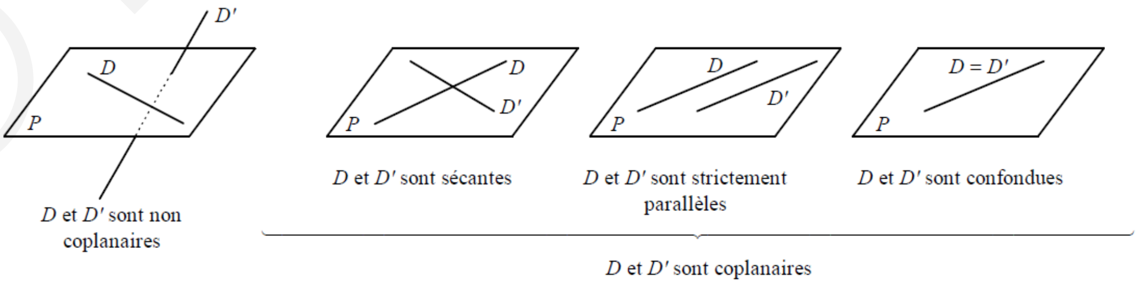
Le volume d'un pavé est $V_{pavé} = L \times l \times h$ et le volume d'un cube d'arête c : $V_{cube} = c^3$

Le volume d'une pyramide est égal à : $V_{pyramide} = \frac{1}{3} \times A_{base} \times h$, A représentant l'aire de la base et h la hauteur.

Droites et plans de l'espace[8]

Par deux points A et B non confondus passe une droite (AB) et une seule. Par trois points A, B et C non alignés passe un plan et un seul, noté (ABC). Des objets géométriques sont dit coplanaires quand ils appartiennent à un même plan.

Positions relatives de deux droites



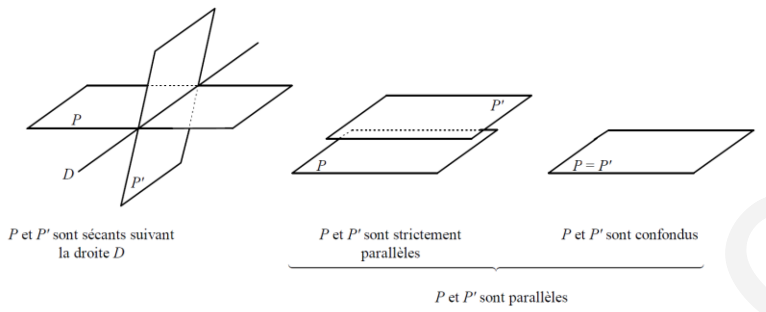
[7] Voir S24 pour la section d'une pyramide par un plan
[8] D'après *http://www.bacamaths.net/*

Des droites parallèles sont des droites coplanaires qui n'ont aucun point commun, ou sont confondues. Quand deux droites sont parallèles à la même droite, elles sont parallèles entre elles.

Des droites perpendiculaires sont des droites sécantes, qui se coupent en formant un angle droit. Elles déterminent donc un plan.

Des droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires. Elles sont telles que leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires.

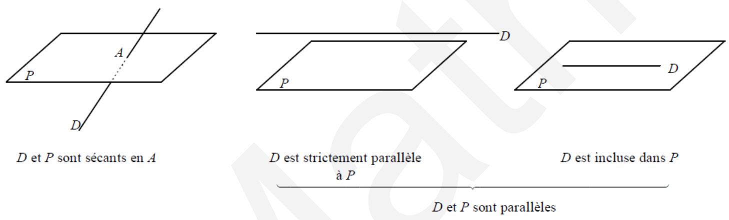
Positions relatives de deux plans



Deux plans sont parallèles quand ils n'ont aucun point commun, ou quand ils sont confondus.

Deux plans qui ne sont pas parallèles sont des plans sécants et leur intersection est une droite.

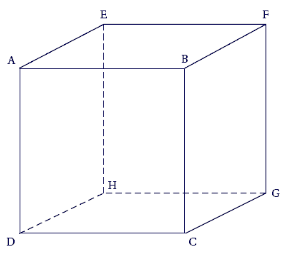
Positions relatives d'une droite et d'un plan



Une droite est orthogonale à un plan quand elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

↘ Pour montrer qu'une droite est orthogonale à un plan, il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

↘ Si une droite est orthogonale à un plan, elle est sécante à ce plan en un point et est orthogonale à toutes les droites du plan passant par ce point.



Ainsi, dans le cube ci-dessus, les points H, F, G sont coplanaires alors que les points H, B, C ne le sont pas. Les arêtes [AB], [EF], [HG] sont parallèles et l'arête [AB] est perpendiculaire à [BC], à [BF], à [AD], à [AE]. L'arête [AB] est donc perpendiculaire au plan (BCF) car elle est perpendiculaire à [BF] et à [BC]. On en déduit que [AB] est perpendiculaire à [BG] et que le triangle ABG est rectangle en B. D'autre part, les arêtes [AB] et [FG] sont orthogonales car [AB] est parallèle à [EF] et [EF] est perpendiculaire à [FG].