S24. Autour des SOLIDES usuels
Géométrie dans l'espace

Mise en route[1]

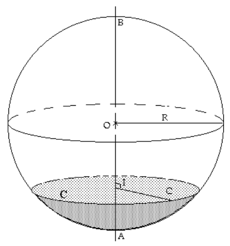


fig. A

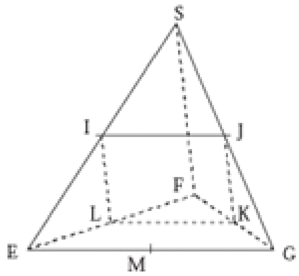


fig. B

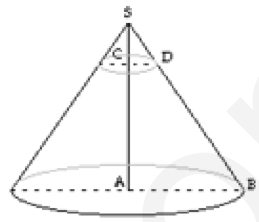


fig. C

A. Sphère

On considère une sphère de centre O et de rayon *R (fig. A)*. On coupe cette sphère par un plan *P* ne passant pas par O. On note $\mathscr{C}$ le cercle intersection de cette sphère et de *P*.

La droite perpendiculaire au plan *P* et passant par O coupe ce plan en I et la sphère en A et B, comme indiqué sur la figure. Soit C un point du cercle $\mathscr{C}$.

a. Quelle est la nature du triangle OIC ?

b. Calculer le rayon *R* de la sphère lorsque $IA = 2\ cm\ et\ IC = 4\ cm$.

B. Pyramide

On considère une pyramide SEFG (*fig. B*). Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs de [SE], [SG], [GF], [EF] et [EG].

1. *a*. Prouver que (IL) // (JK) et que IJKL est un parallélogramme.
   b. Pour cette question, on suppose, que $SF = EG$. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?
   c. Pour cette question, on suppose que (SF) est orthogonale au plan (EFG). Prouver que le quadrilatère IJKL est un rectangle.
2. *a*. Quelle condition suffit-il d'imposer au triangle SEG pour que SIMJ soit un losange ?
   b. Quelle condition suffit-il d'imposer au triangle SEG pour que SIMJ soit un rectangle ?
3. Dessiner le patron d'une pyramide SEFG telle que SIMJ soit un carré et IJKL un rectangle.

C. Cône

Soit un cône de sommet S dont la base est un disque de rayon *8 cm*, et de hauteur [SA] mesurant *25 cm (fig. C)*. Ce cône est tronqué par un plan parallèle à la base, à une hauteur AC de *20 cm* à partir de cette base.

a. Calculer la mesure de la longueur du rayon [CD] du petit cercle.

b. Calculer la mesure de la longueur de la génératrice du petit cône obtenu.

c. Réaliser à main levée un patron de ce petit cône, puis expliquer les différentes étapes de calcul nécessaires à la réalisation en vraie grandeur de ce patron.

[1] D'après Rennes 1997, d'après Bordeaux 2000, D'après Caen 1996

Pour s'exercer[2]

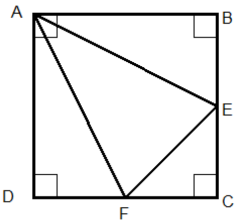


fig.1

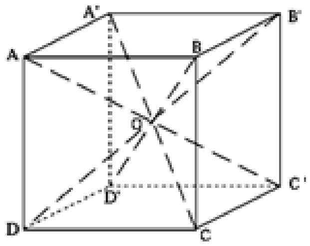


fig.2

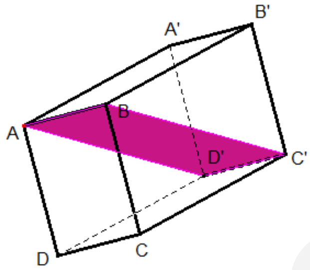


fig.3

Exercice 1

1. On considère la figure ci-dessus (*fig.1*) formée de quatre triangles, formant un carré ABCD de côté 4cm.

a. Justifier que ce patron ne peut pas être un patron de prisme.

b. Où doivent être placés les points E sur le segment [BC] et F sur le segment [CD] pour que ce patron soit un patron de pyramide.

c. Préciser sa nature ainsi que la nature de chacune ses quatre faces.

2. Soit K le sommet du solide où se rejoignent les points B, C et D du patron. On obtient la pyramide AEFK.

a. Montrer que l'on peut faire coïncider la pyramide avec le coin d'un cube de côté *4 cm*.

b. Représenter un cube en perspective et y tracer une représentation de la pyramide.

Exercice 2

ABB'A'DCC'D' est un cube (*fig.2*). Chacune de ses arêtes mesure 4 *cm*. Le point O est le centre de ce cube.

a. Dessiner en vraie grandeur un patron de la pyramide OABB'A'. Préciser les longueurs des segments tracés.

b. Sans utiliser de formule de calcul de volume autre que celle qui donne le volume d'un cube, calculer le volume de la pyramide OABB'A'. En donner une valeur approchée au cm^3 près.

Exercice 3

On considère un parallélépipède plein formé de 6 faces rectangulaires identiques 2 à 2. On appelle S_1 ce solide. On donne en unités *u*, les mesures des arêtes : $AB = 2u$ $\quad BC = 3u$ $\quad AA' = 4u$

1. Calculer le volume V_1 de S_1.

2. On pratique une coupe selon le plan (*ABC'D'*). On obtient deux prismes identiques nommés ADD'BCC' que nous appellerons P_1 et AA'D'BB'C' que nous appellerons P_2, et qui ont chacun 5 faces (*fig.3*).

a. Nommer et donner la nature géométrique des 5 figures planes qui composent P_1. Justifier.

---

[2] D'après Limoges 1998- Bordeaux 2001- D'après Dijon 1996- Aix-Marseille 2001- D'après Grenoble 1998- Rennes 1997

b. Dessiner deux patrons différents de ce prisme en prenant l cm comme unité (*deux patrons sont dits différents s'ils ne sont pas superposables*). La construction sera réalisée sur papier blanc, avec règle graduée, équerre et compas. Il sera tenu compte du soin et de la précision du tracé.

c. Calculer l'aire d'un des deux patrons de ce prisme.

3. On associe les prismes P_1 et P_2 en collant les faces ABCD et A'B'C'D' ensemble, respectivement A en A', B en B', C en C' et D en D': on appelle S_2 ce solide.

a. Quelle est l'aire de la face obtenue à partir des deux triangles BCC' et BB'C'?

b. Quelle est l'aire du patron du solide obtenu ?

c. Quel est le volume de S_2 ?

Exercice 4

1. Montrer que, dans un triangle ABD rectangle en A et dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont respectivement *4 cm* et *3 cm*, la hauteur relative à l'hypoténuse est de *2,4 cm*.

2. On considère une boîte sans couvercle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle (*fig.4*), avec

$AB = 4cm,\ AD = 3\ cm\ et\ AA' = 6\ cm$.

Pour créer des compartiments dans cette boîte, on introduit deux plaques : l'une passant par le plan DBB'D', l'autre passant par le plan IJJ'I', les points I, J, I', J'étant les milieux respectifs des segments [AD], [AB], [A'D'] et [A'B'].

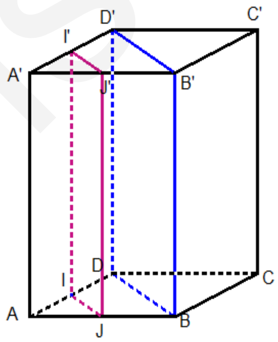


fig.4

On se propose d'étudier le compartiment IJBDI'J'B'D'.

a. Indiquer la nature et les dimensions des faces BDIJ et DBB'D'.

b. Quelle est la nature du solide IJBDI'J'B'D'?

c. Représenter en vraie grandeur un patron du compartiment.

d. Calculer le volume de ce compartiment.

Exercice 5

On considère un cône de révolution (*fig.5*) dont le rayon du cercle de base [OB] mesure *2,5 cm*, la génératrice [AB] mesure *12 cm* et le point B' est à une distance de A de *9 cm*. On désigne par *h* la hauteur [OA] de ce cône.

1. ***a***. Donner le meilleur encadrement possible de *h* en *cm*, au dixième près.

b. En prenant $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ et l'encadrement de *h* précédemment trouvé, déduire le meilleur encadrement possible du volume du cône avec des entiers.

2. En disposant le cône pointe en bas et hauteur verticale, on le remplit avec un liquide jusqu'au point B'. Quel est le volume de ce liquide ? Exprimer ce volume en centimètres cubes, puis en centilitres.

Pour cette question, on pourra utiliser les valeurs approchées par défaut que l'on peut déduire des questions a. et b.

3. Le patron de ce cône (rayon : *2,5 cm*, génératrice : *12 cm*) est constitué d'un secteur de disque.

a. Démontrer que l'angle de ce secteur mesure 75°.

b. Avec la règle non graduée et le compas, construire ce secteur en vraie grandeur, en laissant apparentes les traces de la construction.

c. Donner les grandes étapes de cette construction.

d. Calculer l'aire du secteur au cm^2 près.

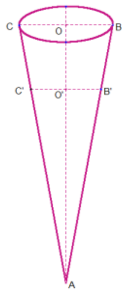


fig.5

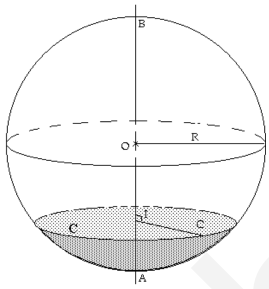


fig.6

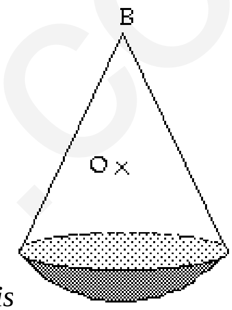


fig.6bis

Exercice 6

On considère une sphère de centre O et de rayon $R = 8cm$, coupée par un plan P. La droite perpendiculaire au plan P et passant par O coupe le plan en I et la sphère en A et B (*fig.6)*. Soit C un point du cercle $\mathscr{C}$, section de la sphère par le plan. On s'intéresse à la calotte sphérique obtenue, représentée en gris sur la *figure 6*.

1. Le volume *V* d'une calotte sphérique est donné par la formule : $V = \dfrac{\pi h^2}{3}(3R - h)$ où *R* est le rayon de la sphère et *h* la hauteur de la calotte sphérique.

a. Calculer la mesure de *h* lorsque le rayon du petit cercle vaut $r = 6,4cm$

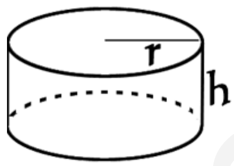
b. Calculer le volume (en cm^3) de cette calotte sphérique. En donner une valeur approchée par excès à *1* cm^3 près.

2. Cette calotte sphérique, une fois remplie de plomb, constitue la partie inférieure d'un jouet appelé "culbuto" (*fig.6bis*) dont la partie supérieure est un cône de révolution dont le sommet est B et de base le disque délimitant la calotte. Déterminer le volume du cône puis le volume total du jouet dont on donnera une valeur approchée par défaut à 1 cm^3 près.

A retenir[3]

☞ **Les solides de l'espace qui ne sont pas des polyèdres**

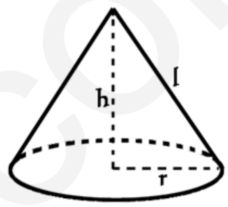
↘ **Le cylindre** *'droit' de révolution* a deux bases qui sont des disques parallèles. On dit que le cylindre est « *de révolution* » car la surface latérale est engendrée par la rotation, autour d'un axe, d'un segment parallèle à l'axe. Quand l'axe « *de révolution* » est orthogonal aux bases, on dit que le cylindre de révolution est droit. La surface latérale d'un cylindre est un rectangle.

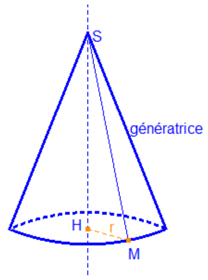


↘ **Le cône** *'droit' de révolution* est un solide limité par une surface engendrée par la rotation, autour d'un axe, d'un segment dont une extrémité S appartient à l'axe de rotation. Il est également limité par un disque de rayon *r* appelé base du cône. Le point S est le sommet du cône.

Quand l'axe de révolution est orthogonal à la base, on dit que le cône de révolution est droit. Si on note H le point d'intersection de l'axe avec la base, on dit que [SH] est la hauteur du cône. La surface latérale d'un cône est un secteur circulaire. Quel que soit le point M appartenant au cercle qui délimite le disque de base, le segment [SM] est une génératrice du cône.

Quel que soit le point M appartenant au cercle qui délimite le disque de base, le triangle SMH est un triangle rectangle en H

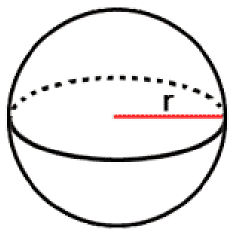




↘ **La boule et la sphère[4]**

Soit O un point de l'espace et r un nombre réel strictement positif.

Tout segment joignant un point de la sphère à son centre est un rayon de mesure *r*. La boule de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leq r$. La sphère de centre O et de rayon *r* est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$.



☞ **Aire et volume**

↘ L'aire de la surface latérale du cylindre est celle d'un rectangle[5] de dimensions *h* et *L*, *L* étant le périmètre du disque de base de rayon *r*. Ainsi $A_{laterale\ du\ cylindre} = h \times 2\pi \times r$. On obtient l'aire totale d'un cylindre fermé en ajoutant à cette aire latérale l'aire des deux disques $A_{totale\ du\ cylindre} = 2\pi r \times h + 2 \times \pi r^2$

L'aire latérale d'un cône[6] est l'aire d'un secteur circulaire ayant pour rayon la génératrice du cône et

[3] Figures http://www.mathguide.com/lessons

[4] Dans le langage courant, on nomme souvent indifféremment boule et sphère.

[5] Penser à l'étiquette qui enveloppe une boite de conserve

[6] Le calcul de l'aire latérale d'un cône est développé en fiche méthode

dont l'angle est à déterminer en tenant compte du rayon du disque de base $A_{latérale\ du\ cone} = \pi \times g \times r$. On obtient l'aire totale d'un cône fermé en ajoutant à cette aire latérale l'aire du disque de base.

L'aire de la sphère de rayon *r* est égale à $A_{sphère} = 4\pi \times r^2$

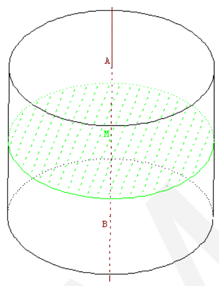
↘ Le volume d'un cylindre dont le rayon de la base est *r* et la hauteur *h* est égale à : $V_{cylindre} = A_{base} \times h = \pi r^2 \times h$.

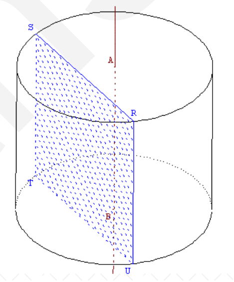
Le volume d'un cône dont le rayon de la base est *r* et la hauteur *h* est égale à : $V_{cone} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$

Le volume d'une boule de rayon *r* est égal à $V_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$.

☞ Section par un plan[7]

La section d'un cylindre droit par un plan parallèle à la base est un disque, isométrique aux bases. La section d'un cylindre droit par un plan perpendiculaire à la base est un rectangle.

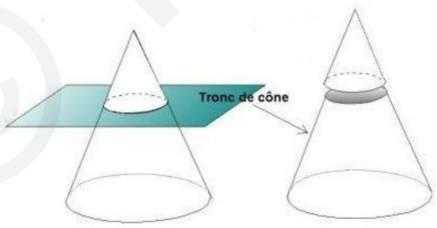


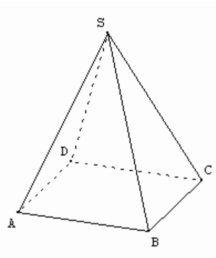


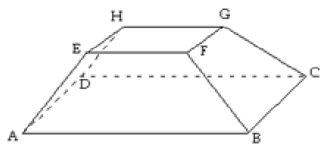
La section d'un cône par un plan parallèle à la base est un disque dont le rayon dépend proportionnellement de la hauteur du plan de coupe. Un petit cône est alors défini dont les dimensions sont proportionnelles à celles du cône initial. Si les dimensions sont réduites dans un rapport *k*, le volume est réduit dans un rapport k^3.

Ainsi, si un cône est coupé à mi hauteur par un plan parallèle à la base, le volume du petit cône obtenu est égal au huitième du volume du cône initial.

L'autre partie du cône s'appelle un tronc de cône (*ci-dessous*).







7 Figures http://www.bibmath.net et Site Descartes et les Mathématiques

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que la base. Une petite pyramide est alors définie, qui a des dimensions proportionnelles à celles de la pyramide initiale. Si les dimensions sont réduites dans un rapport k, le volume est réduit dans un rapport k^3.

Ainsi, si une pyramide est coupée au tiers de sa hauteur par un plan parallèle à la base, à partir du sommet, le volume de la petite pyramide obtenue est égal à un vingt septième de volume initial.

L'autre partie de la pyramide s'appelle une pyramide tronquée (*ci-dessus*).

La section d'une sphère (boule) par un plan passant par son centre, est un grand cercle (disque). La section d'une sphère par un plan ne passant par son centre est un petit cercle. Le rayon du petit cercle dépend de la hauteur du plan de coupe .Le solide obtenu s'appelle une calotte sphérique.