

S3. Autour du CALCUL NUMERIQUE

L'efficacité en calcul numérique est un gain de temps et un bonus quant aux erreurs « d'étourderie ». Il faut donc **s'entraîner régulièrement**. Dans les exercices, on donnera systématiquement les résultats sous la forme la plus simple. Utiliser une calculatrice que vous connaissez bien, mais elle ne fera pas tout !

Mise en route

1. Trouver des écritures fractionnaires de $\frac{3}{5}, \frac{4}{9}, \frac{15}{11}$ tels que le dénominateur de la première soit le numérateur de la seconde, et que le dénominateur de la seconde soit le numérateur de la troisième.

Et si la troisième était $\frac{6}{11}$?

2. Existe-t-il des nombres n qui vérifient : $n^2 = 121$ $n^2 = -100$ $n^2 = 18$ $n^2 = \frac{4}{9}$ $n^2 = \frac{11}{16}$?

3. La vitesse de la lumière est de 300000 km.s^{-1} (kilomètre par seconde). Quelle distance parcourt-elle en une heure ? L'ordre de grandeur de l'année lumière (distance parcourue par la lumière en une année) est :

10^{11} 10^{13} 10^{14} 10^{20} ?

4. Combien le nombre $72,4116 \times 10^{28}$ possède-t-il de chiffres ?

5. Vrai ou Faux ? 97^{26} s'écrit avec moins de 55 chiffres.

6. Marc possède un champ rectangulaire de 40m sur 80m. Pierre possède un champ carré de même aire que celui de Marc. Pierre est persuadé que la longueur de sa clôture est plus petite que celle de Marc. A-t-il raison ?

Pour s'exercer

Exercice 1

a. Ecrire $A = \frac{25 \times 27}{72 \times 75}$ et $B = \frac{6300}{9240}$ sous forme de fraction irréductible

b. Calculer et donner le résultat sous forme de fractions irréductibles

$$C = -\frac{7}{5} \times \left(3 - \frac{8}{21} \right) \quad D = \frac{1}{12} - \frac{15}{4} : \frac{9}{16} \quad E = \frac{2 - \frac{1}{3}}{5 - \frac{5}{6}}$$

Exercice 2

a. Donner l'écriture entière, décimale ou fractionnaire des nombres suivants

$$a = (-5)^2 \quad b = -8^2 \quad c = (-10)^5 \quad d = -10^4 \quad e = 10^{-5} \quad f = (-10)^{-2} \quad g = 5^{-3} \quad h = (-2)^{-4}$$

b. Calculer : $I = \frac{10^2 \times 10^{-4}}{10^3}$ $J = \frac{10^{30} \times 10^{-25}}{10^{-20} \times 10^{25}}$ $K = \frac{10^{-1} + 10^2}{10^{-5} \times 10^2}$

c. Calculer $a^2 - b^2$, $a - b^2$, $(a - b)^2$ pour $a = 30$ et $b = -100$

d. Calculer $\frac{a^2b^3}{c^{-1}}$ pour $a=3$ $b=-10$ $c=2$

Exercice 3

a. Ecrire chacun des nombres suivants en écriture scientifique :

5600000

128 millions

365,042

0,00126

0,000000000037

b. Donner l'écriture scientifique de D, de E, de F.

$$D = \frac{2^5 \times 3^{-8} \times 5^7}{2^6 \times 5^5 \times 3^{-9}}$$

$$E = \frac{24 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-5}}{36 \times 10^{-4}}$$

$$F = 6,2 \times 10^{21} \times 5 \times 10^{-14} \times 10^{-9}$$

$$G = 413,25 \times 10^{-2}$$

Exercice 4

a. Donner un encadrement à l'unité près, puis un encadrement à 10^{-2} près de $\sqrt{21}$, de $\sqrt{35}$

b. Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b le plus petit possible :

$$a = \sqrt{72} \quad b = \sqrt{54} \quad c = \sqrt{28} \quad d = \sqrt{300}$$

c. Développer et réduire : $A = (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$ $B = (\sqrt{2} - \sqrt{5})^2$ $C = (\sqrt{13} + \sqrt{11})(\sqrt{13} - \sqrt{11})$

d. Effectuer et donner le résultat le plus simple possible :

$$a = \sqrt{50} \times \sqrt{6} \times \sqrt{12}$$

$$b = \sqrt{7} \times \sqrt{18} \times \sqrt{15} \times \sqrt{21}$$

$$c = 4\sqrt{7} - 2\sqrt{7} - 11\sqrt{7} + 5\sqrt{7}$$

$$d = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$$

$$e = \sqrt{180} - \sqrt{20} - \sqrt{125} - \sqrt{5}$$

$$f = 3\sqrt{18} + 2\sqrt{98} + \sqrt{242}$$

e. Ecrire sans radical au dénominateur $A = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ $B = \frac{5}{\sqrt{12}}$ $C = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{49}}$

Exercice 5

a. Calculer pour $x = \sqrt{2}$ $A = \frac{4x^2 + 3x - 1}{5x^2 + 3}$

b. Soient $A = 3 + \sqrt{11}$ et $B = 3 - \sqrt{11}$. Calculer A^2 , B^2 , $A \times B$

Chaque résultat sera donné sous la forme d'une valeur exacte la plus simple possible.

c. Soient $C = \sqrt{45} \times \sqrt{10}$ et $D = 2\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{2}$

Comparer les nombres C et D après les avoir écrits sous la forme $a\sqrt{2}$, a étant un entier

d. Calculer pour $x = -2$, $x = \frac{1}{5}$ et $x = \sqrt{2}$, la valeur de $f(x) = (2x-3)^2 + (5x+1)(2x+3)$

Exercice 6

Démontrer ces deux curiosités du nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

a) son carré est égal à lui-même plus 1

b) son inverse est égal à lui-même moins 1

A retenir^a

Les écritures des nombres

Entiers naturels et relatifs, décimaux, rationnels, réels forment les ensembles de nombres que vous avez rencontrés au fil de vos études. Il est important de distinguer leur nature^b et leurs diverses écritures. Ainsi un nombre décimal peut avoir plusieurs écritures différentes : décimale, fractionnaire, scientifique...

Par exemple le nombre décimal 0,125 s'écrit aussi bien $\frac{125}{1000}$ que $\frac{1}{8}$ ou $1,25 \times 10^{-1}$

- **L'écriture décimale** fait référence à l'écriture chiffrée du nombre dans notre système décimal. Attention cependant, l'écriture décimale ne signifie pas toujours « chiffres après la virgule ».

Ainsi 13 est l'écriture décimale de l'entier naturel « treize » ; il pourrait s'écrire 13,000 mais on fait abstraction de ces zéros inutiles dans l'écriture.

- **L'écriture fractionnaire** d'un nombre est l'écriture sous la forme d'un quotient de deux entiers. Une fraction de numérateur a et de dénominateur b s'écrit $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers, b non nul. On appelle fraction décimale une fraction dont le dénominateur peut s'écrire sous la forme d'une puissance de dix ; elle représente alors un nombre décimal.

Ainsi les fractions décimales $\frac{72}{10}$, $\frac{16}{100}$, $\frac{45}{1000}$ représentent respectivement les nombres décimaux 7,2 ; 0,16 ; 0,045,

tout comme $\frac{36}{5}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{9}{200}$ qui leur sont respectivement égales.

- **L'écriture scientifique** d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal vérifiant $1 \leq a < 10$ et p un entier relatif.

Ainsi l'écriture scientifique du nombre 45600 est $4,56 \times 10^4$.

- **L'encadrement** permet de situer le nombre sur la droite graduée. Plusieurs zooms sont possibles selon la précision souhaitée.

Ainsi le nombre $\pi \approx 3,1416$ peut être encadré à l'unité près : $3 < \pi < 4$, au dixième près : $3,1 < \pi < 3,2$, au centième près : $3,14 < \pi < 3,15$...

- **L'ordre de grandeur** d'un nombre peut s'exprimer avec la puissance de dix la plus proche.

Le nombre 45600 peut être encadré par : $10^4 < 4,56 \times 10^4 < 10^5$. Plus proche de « dix mille » que de « cent mille », l'ordre de grandeur de 45600 est 10^4 .

- **La valeur exacte** d'un nombre est unique, même si elle peut s'exprimer par diverses écritures, **les valeurs approchées** sont multiples et dépendent du degré de précision souhaitée.

^a Voir aussi Méthode de calcul numérique

^b Voir cours sur les ensembles de nombres