S4. Autour du CALCUL LITTERAL

Mise en route

1. Voici plusieurs développements de l'expression E = $5(x+3)-3(x+4)$

Laquelle de ces réponses est correcte ? Identifiez les erreurs.

Elève A : $5x+3+3x+12=8x+15$

Elève B : $5x+15+3x-12=8x+3$

Elève C : $5x+15-3x-12=2x+3$

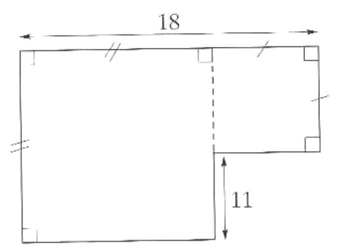
Elève D : $5x+3-3x-12=2x+15$

2. Soit $d=30vt+\frac{v^2}{2}$ où d est la distance d'arrêt (en cm), t le délai de réaction du conducteur (en s) et v la vitesse juste avant le freinage (en km.h^{-1}). Un conducteur en bonne santé a un délai de réaction de 0,5s. Calculer sa distance d'arrêt s'il roule à une vitesse de 90km.h^{-1}.

3. À propos de « a² + b² »

Montrer que $a^2+b^2=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$

Application : Calculer l'aire de la figure ci-contre, formée de deux carrés :



Pour s'exercer[1]

Exercice 1. Application d'une formule

a. Un tonneau contient environ 225litres et on connaît deux dimensions: sa hauteur h=80cm et son petit diamètre d=50cm. Donner une valeur approchée au dixième près de son grand diamètre, sachant que $V=\frac{\pi h\,(2D^2+d^2)}{12}$

b. « A moitié, s'il vous plait ! » clame Juliette quand son Roméo lui sert du champagne dans un verre conique de diamètre 5cm et de hauteur 10cm. Mais au fait, le volume de champagne versé quand on le

[1] Ex3 : G5 2007 ; ex6 : Aix 2001 ; ex7 : Dijon 2003 ; ex8 : Créteil 2000

remplit « à moitié » représente t'il vraiment « un demi » volume du verre plein ? Si non, quelle fraction cela représente-t-il en réalité ? On pourra utiliser la formule du volume du cône V= $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Exercice 2. **Application de la distributivité (Développement et réduction)**

$A=4(x-5)$

$B=2x(x+7)$

$C=5+(2x-7)$

$D=5-(2x-7)$

$E=2x(x+1)-x(2-x^2)$

$F=5(2x-7)-2x(x+5)$

$G=(x+3)(x+2)$

$H=(5-x)(x-6)$

$I=(2x-1)(x-5)$

$J=8(3+x)(x-2)$

$K=(2x+1)(x+3)+(3x-1)(2x-5)$

$L=(x+5)(3-x)-(2x-4)(x+1)$

Exercice 3

a, b, c désignent trois chiffres distincts et différents de 0.

A cet ensemble de trois chiffres, on associe la famille de six nombres à trois chiffres qui s'écrivent en utilisant une fois le chiffre *a*, une fois le chiffre *b*, une fois le chiffre *c*.

Par exemple aux trois chiffres 2, 5, 7 on associe la famille constituée des six nombres suivants : 257, 275, 527, 572, 725, 752. On appelle S la somme des six nombres de la famille et M leur moyenne.

1. Calculer S et M correspondant à la famille donnée dans l'exemple ci-dessus.
2. Montrer que dans le cas général on a $M=37(a+b+c)$
3. Trouver tous les ensembles de trois chiffres distincts et différents de 0 qui permettent de former une famille dont la moyenne M des six nombres vaut 370.

Exercice 4. **Application de la distributivité (Factorisation)**

Dans certains cas, le facteur commun est "visible", quelque fois il est 'caché'

$A=9a^2+3a$ $\quad$ $B=5(b+2)+3b(b+2)$

$C=x(1-x)-3(x-1)$ $\quad$ $D=(x-1)(x+3)+(x-5)(x-1)$

$E=(x+2)^2+\ 3x+6$ $\quad$ $F=(3x-4)(x+5)-(2x+1)(3x-4)$

$G=(x+1)^2+(x+1)(x+3)$ $\quad$ $H=5(2x+1)^2+(2x+1)(x-1)$

$I=3(x+1)(x-4)-(x-4)^2$ $\quad$ $J=\ 4x^2-2x(x+5)$

Exercice 5. **Avec les identités remarquables**

Développer et réduire

$A = (5x-1)(5x+1)$ $B = (2x+5)^2 + (2x-5)^2$

$C = (2x+5y)(2x-5y)$ $D = (3x+1)(x+2) + (x+2)(x-2)$

$E = (2x+7)^2$ $F = (7x-3)^2$

$G = (3x-7)^2 - (3x+7)^2$ $H = (2x+5)^2 + 3x(2x-5)$

Factoriser

$I = 64x^2 - 169$ $J = 49x^2 - 42x + 9$

$K = (2x+7)^2 - 16$ $L = 25 - 20x + 4x^2$

$M = (x-8)^2 - 25$ $N = 9x^2 + 48x + 64$

$O = 36x^2 - (x+1)^2$ $P = (2x+5)^2 - (2x-5)^2$

Exercice 6

1. Voici deux propositions concernant des nombres donnés en écriture décimale. Dire, pour chacune d'elles, si elle est vraie ou fausse et justifier :

Proposition A :

Si l'écriture d'un nombre entier se termine par 2 alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 4.

Proposition B :

Si l'écriture d'un nombre entier se termine par 4 alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 16.

2. L'écriture d'un nombre entier n est de la forme : $\overline{a5}$ où a est le chiffre des dizaines, différent de zéro.

Démontrer que n^2 s'écrit avec quatre chiffres au plus.

Démontrer que l'écriture de n^2 se termine par 25 et que le nombre de centaines de n^2 est égal à : a(a+1).

Exercice 7

On remarque que :

$65^2 = 4225$ et $6 \times 7 \times 100 + 25 = 4225$

$145^2 = 21025$ et $14 \times 15 \times 100 + 25 = 21025$

$1275^2 = 1625625$ et $127 \times 128 \times 100 + 25 = 1625625$

a. Généraliser cette remarque en proposant une relation mathématique.

b. Vérifier cette relation sur deux autres exemples. Démontrer cette relation.

Exercice 8

Soit A un nombre entier naturel.

a. Trouver une condition nécessaire sur le dernier chiffre de A pour que A soit le carré d'un nombre entier naturel. Cette condition est-elle suffisante ?

b. Trouver une condition nécessaire sur le dernier chiffre de A pour que A soit le produit de deux entiers consécutifs. Cette condition est-elle suffisante ?

☞ **A retenir**

Le calcul littéral est indispensable dès que la question d'une généralisation est abordée. On l'utilise, entre autre, dans les démonstrations quand on veut prouver qu'une propriété est vraie.

Pour développer une expression littérale, on utilise la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition (soustraction) $k(a+b)=ka+kb$ $\qquad k(a-b)=ka-kb$

en particulier $-(a+b)=-a-b$ $\qquad -(a-b)=-a+b$

et plus généralement $(a+b)(c+d)=(ac+ad+bc+bd)$ $\qquad (a-b)(c-d)=(ac-ad-bc+bd)$

➘ **Prudence** donc sur les signes.

Ainsi, par exemple :

$$(2x-5)(x-3)-(x+2)(1-x)=2x^2-6x-5x+15-(x-x^2+2-2x)=2x^2-11x+15-(-x^2+2-x)$$
$$=2x^2-11x+15+x^2-2+x=3x^2-10x+13$$

La même propriété permet aussi de **factoriser** c'est à dire de transformer une somme algébrique en produit. Il faut alors au préalable déterminer le « facteur commun ». Il est parfois directement 'visible' ; dans les autres cas il faut d'abord le mettre en évidence.

$$ka+kb=k(a+b) \qquad ka-kb=k(a-b)$$

Ainsi, par exemple :

$$\underset{FACTEUR\ COMMUN}{(x-1)}\,(x-7)+5x\,\underset{FACTEUR\ COMMUN}{(x-1)} = \underset{FACTEUR\ COMMUN}{(x-1)}\,(x-7+5x)=(x-1)(6x-7)$$

$$6x^3-2x^2=\underset{FC}{2x^2}\times 3x-\underset{FC}{2x^2}\times 1=\underset{FC}{2x^2}(3x-1)$$

➘ **A connaître par cœur**

Les identités remarquables permettent de développer plus rapidement certaines expressions.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $\qquad (a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Ainsi, par exemple, en étant attentif aux signes, aux carrés et au double produit :

$$(3x-5)^2=\underset{(3x)^2}{9x^2}-\underset{2\times 3x\times 5}{30x}+\underset{5^2}{25} \qquad (3x-5)(3x+5)=\underset{(3x)^2}{9x^2}-\underset{5^2}{25}$$

Elles sont dans certains cas, indispensables pour factoriser.

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $\qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ $\qquad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Ainsi par exemple :

$$\underset{(2x)^2}{4x^2}+\underset{2\times 2x\times 7}{28x}+\underset{7^2}{49}=(2x+7)^2 \qquad \underset{(6x)^2}{36x^2}-\underset{2\times 6x\times 1}{12x}+\underset{1^2}{1}=(6x-1)^2 \qquad \underset{(4x)^2}{16x^2}-\underset{3^2}{9}=(4x-3)(4x+3)$$