S5. Autour du CALCUL ALGEBRIQUE

Mise en route

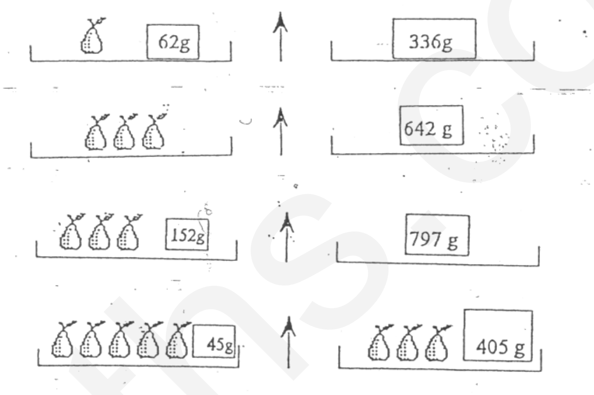
A. Magie !… Magie ? …Pour toutes les générations

Ajouter 2 à votre âge, retrancher 2 à votre âge, puis multiplier ces deux résultats.

Ajouter 5 à ce dernier résultat et enfin retrancher le carré de votre âge…Le résultat est 1 n'est-ce pas ?!

Mais est-ce toujours vrai ?

B. On admet que, pour une pesée donnée, toutes les poires ont la même masse. Déterminer, pour chacune des quatre pesées ci-contre, la masse d'une poire.

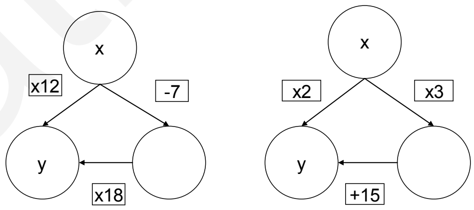


C. Dans le graphique ci-contre, x et y désignent des nombres.

Pour aller de x à y on peut suivre deux itinéraires différents.

Pour chaque schéma, écrire un égalité qui montre que les deux itinéraires donnent le même résultat.

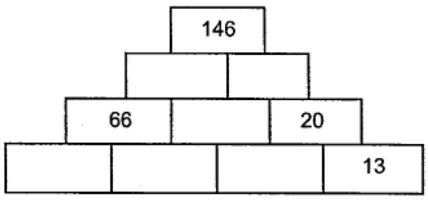
Trouver x.



Hors série Petit x 1998-1999

D.

Compléter les valeurs qui manquent dans le mur, sachant que le nombre écrit sur chaque brique est la somme des nombres écrits sur les deux briques sur lesquelles elle repose. Expliciter la procédure de résolution utilisée et fournir le détail des calculs.



Pour s'exercer[1]

Exercice 1

Résoudre dans IN les équations suivantes, c'est-à-dire donner les solutions entières positives si elles

[1] Petit x. IREM Grenoble. D. Reims 2003, 5. D'après Reims 2004, 7. Dijon 2000, 10. G2 2007, 12. G6 2007

existent : $2a = 1$ $3a+5=1$ $5(4a+5) = 2(4+10a)$ $9(4a+8)=12(6+3a)$

Ces équations ont-elles des solutions dans IR (ensemble des nombres réels) ?

Exercice 2

0 est-il solution de l'équation $\frac{x+3}{4}-\frac{x-1}{6}=\frac{7}{12}$? Est-il solution de l'équation $(4x - 5)^2 = x^2 + 5$? Est-il solution de l'inéquation $2x-5 \leq 3x-2$?

Exercice 3 : Résoudre dans *IR*

$11 + x = -13$ $\frac{1}{2}-x=\frac{7}{4}$ $6x = -40$ $4 - 3x = 16$ $12x - 5 = -3x + 7$ $5(x+7)=2(3-2x)$

Exercice 4

Résoudre ces deux inéquations, donner une représentation graphique des solutions

$7x - 5 < 3x + 2(x+5)$ $4(x+2) \leq 6x - 5$

Donner tous les nombres entiers vérifiant la fois les deux inéquations.

Exercice 5

On considère la machine à nombres suivante :

Etape 1	Ajouter 2
Etape 2	Multiplier par 4
Etape 3	Enlever 20
Etape 4	Diviser par 2

Un nombre qui entre dans la machine à nombres subit les quatre étapes. Ainsi, si le nombre 2 entre dans la machine, il devient d'abord 4, puis16, puis-4, enfin -2.

1. Quel nombre faut-il entrer dans la machine afin d'obtenir un zéro à l'issue de l'étape 4 ?
2. On fait entrer un nombre *x* dans la machine. Exprimer en fonction de *x* les nombres obtenus à chacune des étapes.
3. Existe-t-il un nombre qui ressort inchangé après avoir traversé la machine ?
4. On fabrique une nouvelle machine en ajoutant deux étapes à l'ancienne :

Etape 5	Multiplier par *a*
Etape 6	Ajouter *b*

Déterminer les valeurs de *a* et *b*, pour que tout nombre ressorte inchangé après avoir traversé la nouvelle machine.

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes dans *IR*

$\frac{x+4}{3}=\frac{2x+5}{4}$ (x -3) - (5-2x) = 0 (x -3) (5-2x) = 0 (x+3) (4x-5) + 5 (x+3) = 0

Exercice 7

« Le matin, au réveil, le nez de Pinocchio a 5cm de long. Quand, au cours de la journée, Pinocchio dit un mensonge, la fée aux cheveux bleus l'allonge de 3cm, mais quand il dit la vérité, la fée le raccourcit de 2cm. »

1. A la fin de la journée, Pinocchio a dit 7 mensonges et son nez a 20cm de long. On cherche combien de fois Pinocchio a dit la vérité à la fée au cours de la journée. On désigne par *x* le nombre de fois où Pinocchio a dit la vérité. Résoudre algébriquement le problème, puis donner une solution arithmétique accessible à un élève de cycle III
2. En fin de journée, le nez de Pinocchio mesure 5cm. Pourtant, au cours de la journée, il a dit des mensonges et des vérités. Sachant que, dans une journée, Pinocchio dit entre 1 et 15 mensonges et 1 et 15 vérités, donner toutes les possibilités de nombres de mensonges et de nombres de vérités permettant de revenir à un nez d'une longueur de 5cm.

Exercice 8

a. 5 est-il solution de l'équation $x^2 - 10x + 25 = 0$?

b. 3 est-il solution de l'équation $y^2 - 6y + 9 = 0$? Y a-t-il d'autres solutions ?

c. Vérifier que x=1 est solution de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$. Y a-t-il d'autres solutions ?

Exercice 9 Résoudre dans *IR*

$x^2 - 49 = 0$ $(x+4)^2 = 36$ $x^2 = 25x$ $x^2 = 6x - 9$ $x^2 + 4x + 4 = 16$ $9x^2 = 8$

Exercice 10

Pour la fête de l'école, des parents d'élèves ont confectionné des flans pâtissiers et des tartes aux pommes. Un flan pâtissier est vendue 1,50€ et une part de tarte aux pommes 2€. Dans l'après midi, 72 parts de gâteaux ont été vendues pour une recette totale de 122€. Déterminer le nombre de parts vendues par une méthode algébrique, puis par un raisonnement de type arithmétique.

A la fin de l'après midi il reste une tarte aux pommes entière. Quatre enfants se partagent le gâteau de la manière suivante : Jean Marc se sert en premier et en prend un tiers, Sophie prend trois huitièmes de ce qu'a laissé Jean Marc, enfin Antoine et Rémi se partagent le reste de façon équitable. A quelle fraction de tarte correspond la part de chaque enfant ?

Exercice 11

a. Trouver trois couples (x, y) solutions de l'équation $2x + 3y = 18$

b. Résoudre dans R les systèmes : $\begin{cases} y = 24 - x \\ 40x + 35y = 910 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + 3y = 20,5 \\ 4x + 4y = 22 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ x + 4y = 19 \end{cases}$

Exercice 12

Etant donné trois nombres, en les additionnant deux à deux, on obtient trois sommes. Si les sommes obtenues sont 78, 59, et 43 retrouver les nombres choisis.

☞**A retenir**[2]

On se place ici dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Une équation (inéquation) est une égalité (inégalité) entre deux expressions algébriques, qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs de(s) l'inconnue(s). **La résolution** d'équations (inéquations) consiste à déterminer ces valeurs ; elle repose sur les propriétés des égalités (inégalités).

- *a, b et c* étant des nombres réels, c non nul, $si\ a = b\ alors\ \ a + c = b + c,\ a - c = b - c,\ a \times b = b \times c,\ \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Dès lors qu'on peut ajouter ou soustraire, multiplier ou diviser par un même nombre réel non nul les deux membres d'une égalité, on obtient une équation équivalente à la précédente lors de chaque opération de ce type, c'est-à-dire une équation ayant les mêmes solutions.

Les équations du type $ax + b = c \quad (avec\ a \neq 0)$ ont en général une solution unique $x = \frac{c-b}{a}$.

- Par exemple l'équation $2(x-1)+4 = 3x+5$ est équivalente à l'équation $2x+2 = 3x+5$. En transposant 2 dans le membre de droite et $3x$ dans le membre de gauche, on obtient une nouvelle équation équivalente $-x = 3$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation a donc pour solution $x = -3$.

➘ Il faut penser à changer de signe quand on transpose un terme d'un membre à l'autre.

Dans certains cas, ces équations ont une infinité de solutions ou pas de solution.

- C'est par exemple le cas de l'équation $2(x-1)+4 = 2(x+1)$, équivalente à l'équation $2x+2 = 2x+2$ qui a une infinité de solutions dans l'ensemble des réels, c'est-à-dire que l'égalité est vérifiée pour tout réel *x*. Par ailleurs, l'équation $2(x-1)+4 = 2x-1$, équivalente à l'équation $2 = -1$, est sans solution dans $\mathbb{R}$ puisque égalité n'est jamais vérifiée.

➘ Il faut aussi penser qu'une équation peut avoir une solution dans certains ensembles de nombres et ne pas en avoir dans d'autres.

Pour les inéquations de la forme $ax + b \leq 0\ ou\ ax + b \geq 0$ **il faut être plus vigilant.**

On peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité, donc aussi d'une inéquation : l'ordre est conservé.

- Ainsi, pour a, b et c réels, si a < b alors a+c < b+c, si a < b alors a-c < b-c

On peut multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif les deux membres d'une inégalité, donc aussi d'une inéquation : l'ordre est conservé.

[2] Voir aussi méthode de calcul algébrique

- Ainsi pour c réel strictement positif, $si\ a < b\ alors\ a \times c < b \times c$ ou encore $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Par exemple, l'inéquation $2x+3 \leq 5x$ a pour solutions toutes les valeurs de x supérieures ou égales à 1.

➘ Par contre **prudence** : Si on multiplie ou divise par un même nombre strictement négatif les deux membres d'une inégalité, donc aussi d'une inéquation, l'ordre change.

- Pour c réel strictement négatif, $si\ a < b\ alors\ a \times c > b \times c\ ou\ encore\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Ainsi l'inéquation $-3x \leq -6$ est équivalent à l'inéquation $3x \geq 6$, et a pour solutions tous les réels vérifiant $x \geq 2$.

Les équations du second degré comportent un terme en x^2 sous leur forme développée $ax^2+bx+c=0$.

Les équations de la forme $x^2=a$ ont deux, une ou zéro solutions selon que a est respectivement un réel positif, nul ou négatif.

- Ainsi par exemple, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2=12$ admet deux solutions opposées $x=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\ et\ x=-2\sqrt{3}$.

  L'équation $x^2=0$ a pour seule solution (double) $x=0$, l'équation $x^2=-1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Le cas général de résolution des équations $ax^2+bx+c=0$ relève des programmes de lycée. Cependant au collège, les « **équations-produit** » peuvent se résoudre, en transformant les expressions algébriques par factorisation simple. On pourra alors appliquer la propriété : $Si\ a \times b = 0,\ alors\ soit\ a=0,\ soit\ b=0$

- Ainsi par exemple :

  $\underbrace{(x-1)(2x+6)}_{produit} = \underset{nul}{0}\ \ soit\ x-1=0,\ soit\ 2x+6=0$. L'équation a deux solutions 1 et -3.

  $\underbrace{9x^2+24x+16}_{identité\ remarquable}=0\ peut\ s'écrire\ (3x+4)^2=0$. L'équation a une seule solution $-\frac{4}{3}$.

Une équation du premier degré à deux inconnues est de la forme $ax+by+c=0$ où a,b,c,x,y sont des nombres réels (a et b non nuls). Les solutions sont l'infinité de couples (x, y) pour lesquels l'égalité est vérifiée.

- Par exemple l'équation $2x+3y=12$ est vérifiée par les couples $(0,4);(6,0);(3,2);(4,5;1);(1;\frac{10}{3})$..... et bien d'autres encore. Cette équation a une infinité de couples solutions.

Les solutions d'un système formé de deux équations de ce type sont donc les couples (x, y) pour lesquels les deux équations sont simultanément vérifiées. Un système peut avoir une solution, pas de solution ou une infinité de solutions. Les méthodes couramment utilisées pour résoudre un système sont la méthode de substitution et la méthode d'addition ou de combinaison linéaire[3].

$\begin{cases} 5x+y=1 \\ 10x+3y=5 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues qui a pour solution le couple $(-\frac{2}{5};3)$

[3] Voir Méthode de calcul algébrique