S7. Autour des MULTIPLES ET DIVISEURS

Mise en route

A. Vrai ou faux ?

- Tout multiple de 3 est multiple de 9.
- Un nombre divisible par 4 est divisible par 2.
- Un nombre divisible par 2 est divisible par 4.
- Tous les nombres premiers sont impairs.
- La somme de deux nombres premiers est un nombre premier.
- Si a est un nombre entier pair alors a^2 est aussi un nombre entier pair.

B. a. Sans effectuer de division, comment peut-on prévoir que 36 054 est divisible par 18 ?

b. Quel est le plus petit nombre naturel de quatre chiffres tous différents de zéro, divisible à la fois par 4 et par 9 ?

C. Une caisse à parois rectangulaires a pour dimensions en centimètres, 180, 150 et 90. On veut fabriquer des boîtes cubiques aussi grandes que possible dont l'arête est mesurée par un nombre entier de centimètres et avec lesquelles on se propose de remplir la caisse. Calculez le nombre de ces boîtes.

D. Vous comptez de 7 en 7 à partir de 38 jusqu'au plus grand nombre entier strictement inférieur à 365.
Quel est le dernier nombre nommé ? Combien avez-vous nommé de nombres (38 compris) ?
Par quels nombres entiers positifs pourrait-on remplacer le nombre 365 de l'énoncé de sorte que les réponses obtenues en question a) restent valides ?

Pour s'exercer[1]

Exercice 1

a. Quels sont les nombres inférieurs à 10 qui possèdent exactement trois diviseurs ? (sans justifier).

b. « Je suis un nombre à trois chiffres dont la somme vaut 13 et je possède exactement trois diviseurs. Qui suis-je ? ». Trouver ce nombre (il est unique) en expliquant la démarche.

Exercice 2

a. Parmi les nombres suivants, quels sont les multiples de 5 ?

$$1025 \; ; \; 3{,}6\times10^2 \; ; \; 312 \times 10^0 \; ; \; 0 \times 10^6 \; ; \; 40120 \times 10^{-1} \; ; \; 19 \times 10^6.$$

b. Soient les nombres A et B tels que $A = 2 \times 3^4 \times 3 \times 15$ et $B = 30^3$.

[1] Amiens 2003-Besançon 2004 -Créteil 2004 -Nouvelle-Calédonie 2004- Aix 2005-Besançon 2005-Amiens 2005 -Nancy 2002 -La Réunion 2005 - Aix 2006

Quelles sont les puissances de 3 qui divisent A ? Quelles sont les puissances de 3 qui divisent B ?

Exercice 3

Un nombre N a pour écriture décimale $\overline{72a83b}$. N est divisible par 6 et 45. Quel est le chiffre b ?
Déterminer N.

Exercice 4

Rechercher et citer tous les diviseurs de 72 puis trouver le nombre entier x tel que le produit des trois nombres x, le suivant de x, le double de x, soit égal à 72.

Exercice 5 Vrai ou faux ?

a. Si le nombre à quatre chiffres 8b76 est un multiple de 3, alors le nombre b est un multiple de 3.
b. Le produit de trois nombres consécutifs dont le premier est pair est divisible par 24.

Exercice 6

Les nombres a, b et c sont des nombres entiers tels que $0 < a \leq b \leq c$.
On suppose que a, b et c sont les mesures de longueur des côtés d'un triangle rectangle.
Montrez que l'un au moins de ces trois nombres est pair.

Exercice 7

Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires. Il veut faire des paquets de sorte que :

- Tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges
- Tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires
- Toutes les billes rouges et toutes les billes noires sont utilisées.

1. Quel nombre maximal de paquets pourra –t-il réaliser ?
2. Combien y aura –t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

Exercice 8

a. Le PGCD de deux nombres est 18. Leur PPCM est 648. Quels sont ces deux nombres ?
b. Trouver le PGCD et le PPCM des nombres 4125 et 2700. Calculer le produit de ces 2 nombres puis le produit de leur PGCD par leur PPCM. Que constate-t-on ?

Exercice 9

Déterminer le nombre N satisfaisant simultanément aux trois conditions ci-dessous :
N est divisible par 6, mais N n'est pas divisible par 8. N a exactement 15 diviseurs.
On rappelle que si la décomposition d'un nombre en facteurs premiers est de la forme $A^aB^bC^c$..., alors le nombre de ses diviseurs est (a+1) (b+1) (c+1)…

Exercice 10

Etant donné un entier n supérieur ou égal à 10, on appelle associé de n l'entier obtenu en intercalant un 0 entre le chiffre de dizaines et celui des unités de n. Par exemple, l'associé de 5 467 est 54 607.

1. Quel est l'associé de 768 492 ?
2. L'entier 2 005 est-il l'associé d'un nombre ? Si oui lequel ?
3. a. Démontrer la propriété suivante : si n est un entier divisible par 9 alors son associé l'est également.
   b. Formuler la réciproque de la propriété précédente.
   c. Cette réciproque est-elle vraie ? Justifier.
4. Enoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur l'entier n, pour que son associé soit divisible par 4. La démontrer.
5. Démontrer que les restes de la division euclidienne de n et de son associé par 5 sont les mêmes.

Exercice 11

1. Ecrire l'égalité caractéristique traduisant la division euclidienne de 1001 par 11
2. Soit $\overline{mcdu}$ un nombre à 4 chiffres écrit en base 10. Vérifier que :

$$\overline{mcdu} = 1001 \times m + 99 \times c + 11 \times d - m + c - d + u$$

3. a. A partir de la question précédente, énoncer et démontrer un critère de divisibilité par 11 pour les nombres inférieurs à 9999 (condition nécessaire et suffisante)
   b. Utiliser ce critère pour trouver trois nombres de 4 chiffres multiples de 11 ayant 38 centaines.
4. a. Montrer que le critère de la question précédente s'applique aussi aux nombres à 6 chiffres qu'on notera $\overline{abmcdu}$.
   b. Utiliser alors ce critère pour déterminer si le nombre $1,2452 \times 10^{11}$ est divisible par 11. Justifier la réponse.

☞ **A retenir**[2]

L'arithmétique est l'étude de l'ensemble des entiers naturels et des relations numériques dans cet ensemble.

On se place ici dans l'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;......\}$.

Multiples et Diviseurs

Un entier naturel a est **multiple** d'un entier naturel b si, et seulement si, il existe un entier naturel q tel que $a = b \times q$. On dit aussi que b est un **diviseur** de a ou que a est **divisible** par b.

Ainsi on peut tout aussi bien dire que 35 est un multiple de 5 ou que 35 est divisible par 5. On peut aussi dire que 5 est un diviseur de 35. Les diviseurs de 35 sont 1, 5, 7, 35. On peut écrire $D_{35} = \{1, 5, 7, 35\}$.

Plus particulièrement, tout entier naturel est multiple de 1, et 1 possède un seul diviseur 1. D'autre part, 0 est multiple de tout entier naturel et tout entier naturel est diviseur de 0.

[2] Voir Méthode Arithmétique

Dans cet ensemble, les nombres pairs pourront s'écrire sous la forme $2n$ et les nombres impairs sous la forme $2n+1$, les multiples de 3 pourront s'écrire sous la forme $3k$, les multiples de 9 pourront s'écrire sous la forme $9k$ …..

Des critères de divisibilité permettent de reconnaitre rapidement certains diviseurs :

- Un nombre est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6, ou 8.

  Ainsi 22, 14, 38, 76, 90 sont pairs et divisibles par 2 ; par contre 17, 21, 35, 87, 89 ne le sont pas et sont impairs.
- Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.

  Ainsi 125, 270… sont divisibles par 5.
- On peut déduire de ces deux critères que les nombres divisibles par 10, c'est-à-dire les multiples de 10 se terminent par 0.
- Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

  Ainsi 435, 534, 453, 543, 354, 345 sont divisibles par 3 car 4+3+5=12 et 12 est un multiple de 3.
  Par contre on peut remarquer que 23 n'est pas divisible par 3 (bien qu'il se termine par 3 !).
- Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

  Ainsi 297, 279, 792, 729, 927, 972 sont divisibles par 9 car 2+9+7=18 et 18 est un multiple de 9.
- Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4.

  Ainsi 1614 n'est pas divisible par 4, alors que 1416 lui est divisible par 4 car il se termine par 16.

Quelques propriétés des diviseurs (et donc des multiples)

Si un entier naturel non nul c divise a et b, alors il divise $a+b$

Si c divise a *et* b, alors $a = c\times q$ *et* $b = c\times q'$. On en déduit que $a+b = c\times(q+q')$, donc que c divise $a+b$

Si un entier naturel non nul a divise b, lui-même entier naturel non nul, et si b divise c, alors a divise c.

Si a divise b, alors $b = a\times q$, et si b divise c, alors $c = b\times q'$. On en déduit que $c = a\times q\times q'$, donc que a divise c.

Prudence : Si a *et* b divisent c, alors $a\times b$ divise t-il c ? Ou dit autrement, si c est multiple de a et c multiple de b, c est-il multiple de $a\times b$?

Par exemple 4 et 10 divisent 100, pourtant 40 ne divise pas 100 (il n'existe pas d'entier naturel q tel que $100 = 40\times q$). De même, 12 est multiple de 4 et de 6, pourtant 12 n'est pas multiple de 24. Cette propriété est donc fausse ; cependant elle fonctionne dans certains cas comme : 12 est multiple de 2 et de 3, il est bien multiple de 6 (ici c'est vrai car 2 et 3 sont premiers entre eux*)

Nombres premiers

Tout nombre entier qui a exactement deux diviseurs, 1 et lui même, est un nombre premier.

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

0 n'est donc pas un nombre premier (il admet une infinité de diviseurs)

1 n'est pas premier (il n'admet qu'un diviseur, lui-même).

↘ Décomposition en facteurs premiers

Tout nombre entier naturel non nul qui n'est pas premier peut aussi s'écrire de manière unique comme un produit de facteurs premiers.

Cette décomposition peut permettre de trouver l'ensemble de tous les diviseurs d'un nombre entier[3]. Si la décomposition d'un nombre en facteurs premiers est de la forme $A^a \times B^b \times C^c$ …, alors le nombre de ses diviseurs est $(a+1)(b+1)(c+1)$.

Ainsi $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ .On peut alors savoir directement que 60 possède $(2+1)\times(1+1)\times(1+1) = 12$ diviseurs **.**

$D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

↘ PGCD

Soient *a* et *b* deux entiers naturels non nuls. Ils ont au moins un diviseur commun 1.

Le Plus Grand Diviseur Commun à *a* et *b* est appelé le PGCD de *a* et de *b*.

Deux nombres dont le PGCD est 1 sont **premiers entre eux***.

Ainsi 201 et 365 sont premiers entre eux ($201 = 63 \times 7$ *et* $365 = 73 \times 5$, leur PGCD est donc 1), alors que 143 et 377 ne le sont pas ($143 = 13 \times 11$ *et* $377 = 13 \times 29$, leur PGCD est 13.)

↘ PPCM

Soient *a* et *b* deux entiers naturels non nuls. Ils ont au moins un multiple commun $a \times b$

Le **Plus Petit des Multiples Communs** à *a* et *b* est appelé le PPCM de *a* et de *b*.

Ainsi le PPCM de 24 est 18 est 72, celui de 15 et 8 est 120 (produit de 15 et de 8 car 15 et 8 sont premiers entre eux).

↘ Propriété

Le produit de deux nombres entiers *a* et *b* est égal au produit de leur PGCD par leur PPCM .

Par exemple $75 = 3 \times 5^2$ $48 = 3 \times 2^4$ $75 \times 48 = 3600$

$PGCD(75,48) = 3$ $PPCM(75,48) = 3 \times 2^4 \times 5^2 = 1200$ $PGCD \times PPCM = 3600$

[3] Voir Méthode Arithmétique