

S8. Autour de la DIVISION EUCLIDIENNE

Mise en route

A. Vrai ou Faux ?

- a et q sont deux nombres entiers naturels. L'égalité $a = 13q + 18$ montre que q est le quotient euclidien de a par 13.
- Sachant que $36202744 = 9658 \times 3748 + 4560$, le quotient de la division euclidienne de 36202744 par 3748 est 9658 et le reste 4560.

B. On s'intéresse au quotient et au reste de la division euclidienne de 40 626 par 12. Voici quatre résultats, tous erronés.

	Résultat 1	Résultat 2	Résultat 3	Résultat 4
Quotient	348	3384	3382	3383
Reste	8	18	6	0

Sans s'appuyer sur le calcul effectif du quotient et du reste, expliquez pourquoi ces résultats ne sont pas corrects. Pour chacun des résultats, on utilisera un argument de nature différente.

C. Comment utiliser une calculatrice pour obtenir le quotient euclidien et le reste de 73 956 par 13 ?

Que faut-il ajouter ou retrancher au nombre 73 956 pour que le quotient de ce nombre dans la division euclidienne par 13 augmente ou diminue d'une unité ?

D. Trouver le quotient euclidien de 2782 par 26, puis analyser les erreurs éventuelles faites par ces élèves.

Lucie	Aurélie	Laetitia	Stève
$\begin{array}{r l} 2782 & 26 \\ 182 & 15 \\ \hline 52 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 2782 & 26 \\ 18 & 107 \\ 182 & \\ \hline 0 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} \overline{2782} & \overline{26} \\ 07 & 1391 \\ 18 & \\ \hline 02 & \\ 0 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 2782 & 26 \\ 182 & 17 \\ \hline 00 & \end{array}$

E. Compléter la division suivante

$$\begin{array}{r|l} \cdot \cdot 5 \cdot \cdot & 275 \\ - \cdot \cdot \cdot & 1 \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot & \\ - \cdot 6 \cdot \cdot & \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot & \\ - \cdot \cdot 5 \cdot & \\ \hline 3 & \end{array}$$

F. Pour son anniversaire, Charlie a eu des chocolats. Combien, demande Bruno ?

« Je me rappelle seulement, dit Charlie, qu'il y en avait moins de 100 et que lorsque je les ai répartis en tas de 2, puis de 3 et enfin de 4, il m'en restait 1 à chaque fois, mais lorsque je les ai mis en tas de 5, il n'en restait pas ». Combien de chocolats Charlie a-t-il eu pour son anniversaire?

Pour s'exercer¹

Exercice 1

On cherche un nombre de trois chiffres, multiple de 9 et dont le quotient dans la division euclidienne par 21 est 33. Déterminer le (ou les) nombre(s) solution(s).

Exercice 2

- Donner les restes des divisions par 6 et par 3 de s deux sommes : $5+7+9$ et $15+17+19$. Peut-on prévoir ceux de $1527+1529+1531$?
- Donner le reste de la division par 6 de la somme de trois nombres impairs consécutifs.
- Donner le reste de la division par 3 de la somme de trois nombres impairs consécutifs.
- Trouver trois nombres impairs consécutifs dont la somme est égale à 12027.

Exercice 3

Dans la division euclidienne d'un nombre non nul par 7, on trouve un quotient égal au double du reste. Trouver toutes les valeurs possibles du dividende, du quotient et du reste de cette division.

Exercice 4

Trouver tous les entiers naturels n à quatre chiffres satisfaisant aux conditions suivantes :

- le nombre de centaines de n est un nombre premier inférieur à 20.
- le reste de la division de n par 100 est un multiple de 24.
- le reste de la division de n par 9 est supérieur à 6.
- le reste de la division de n par 5 est égal à 1

Exercice 5

Un supermarché reçoit une livraison de bouteilles.

Si l'on compte les bouteilles par 3, 5 ou 7, il en reste toujours 2.

Sachant que le nombre de bouteilles livrées est compris entre 1500 et 1600, combien de bouteilles le supermarché a-t-il reçues ?

¹ Nice 99 - 2007G3 - Rouen 99 - Poitiers 96 - Grenoble 2000 - Grenoble 2002 - Bordeaux 2005 - Nice 1996 - Amiens 2001 - Bordeaux 2000 - Aix 92

Exercice 6

Une colonie de vacances qui accueille au maximum cent enfants, organise une course d'orientation par équipes. Chaque équipe est constituée d'au moins deux enfants.

Les moniteurs souhaiteraient qu'il y ait le même nombre d'enfants dans chaque équipe mais s'ils regroupent les enfants par trois, il en restera deux. S'ils les regroupent par quatre, il en restera un et s'ils les regroupent par cinq, il en restera deux. Finalement, ils réussissent à former plusieurs équipes, toutes avec le même nombre d'enfants.

Combien d'enfants y a-t-il dans cette colonie de vacances? Combien d'équipes sont ainsi formées ?

Exercice 7

Problème 1 : Des billes doivent être partagées entre deux enfants de telle sorte que le produit du nombre de billes attribuées au premier par le nombre de billes attribuées au second soit égal à 285.

Quels sont tous les résultats possibles du partage?

Problème 2 : Trois personnes ont reçu chacune une somme d'argent différente exprimée en euros (nombre entier). Soit S_1 le montant reçu par la première personne, S_2 le montant reçu par la deuxième personne et S_3 le montant reçu par la troisième personne. Sachant que $S_1 \times S_2 \times S_3 = 2431$, déterminez toutes les solutions possibles.

Problème 3 : Dans un jeu, une cagnotte est partagée entre les gagnants. Son montant exprimé par un nombre entier inférieur à 4000€. Chacun reçoit 129 €. Il reste 28 € dans la cagnotte. Quel est le montant maximal de la cagnotte?

Exercice 8

Au réfectoire, les élèves remplissent les tables complètes de 8 élèves au fur et à mesure qu'ils se présentent.

a. Au premier service 171 élèves sont déjà installés. Combien peut-on encore en accueillir sans occuper une nouvelle table ?

b. Au deuxième service, 246 élèves sont accueillis dont Nathalie et ses trois meilleures amies qui décident d'entrer les dernières.

Sont-elles sûres d'être à la même table ? Justifier la réponse.

Exercice 9

Les lettres a et a' représentent des nombres entiers naturels. Dans la division euclidienne de a par 11, le reste est r . Dans la division euclidienne de a' par 11, le reste est r' . Déterminer le reste :

a. dans la division euclidienne de $a + a'$ par 11.

b. dans la division euclidienne de $3a$ par 11.

Exercice 10

On prend un nombre de 3 chiffres, par exemple 763, on le réécrit à droite de lui-même pour former un nombre de 6 chiffres : 763 763. On divise le nombre obtenu par 7, puis le quotient obtenu par 11, et le quotient de cette dernière division par 13. Donner le résultat obtenu.

Recommencer la même suite d'opérations à partir de 691. Donner le résultat.

Au vu des résultats précédents, énoncer une proposition générale. Démontrer cette proposition.

A retenir

La division euclidienne de deux entiers naturels a et b est l'opération qui permet de trouver le quotient entier (euclidien) de a par b et le reste : pour tout entier naturel a et tout entier naturel b non nul, il existe un entier naturel unique q et un entier naturel unique r tels que $a = b \times q + r$, où a est le dividende, b le diviseur, q le quotient, r le reste, avec $0 \leq r < b$

⚠ **Attention à bien prendre en compte que le reste est toujours inférieur au diviseur.**

Ainsi l'égalité $75 = 9 \times 8 + 3$ montre que 8 est le quotient euclidien de 75 par 9 avec un reste égal à 3. De même elle montre que 9 est le quotient euclidien de 75 par 8 avec le même reste 3. Par contre l'égalité $65 = 8 \times 7 + 9$ ne traduit pas la division euclidienne de 65 par 8 ou de 65 par 7 car le reste 9 est supérieur à 7 et à 8. Ces deux divisions euclidiennes s'écriraient $65 = 8 \times 8 + 1$ et $65 = 7 \times 9 + 2$.

Remarque : pour la division euclidienne, il n'y a pas de signe conventionnel pour le quotient entier

Si le quotient est exact on peut écrire $24 : 3 = 8$ ou $27 : 5 = 5,4$, mais on évitera l'écriture $27 : 5 = 5(\text{reste } 2)$ qui sera remplacée par $27 = 5 \times 5 + 2$.

Petit rappel sur la technique de division posée

Pour trouver le quotient euclidien q de 7805 par 27, on cherche d'abord l'ordre de grandeur

$$27 \times 10 = 270$$

$$27 \times 100 = 2700$$

$$27 \times 1000 = 27000$$

$$100 < q < 1000$$

Le quotient a donc trois chiffres.

$$\begin{array}{r|l} 7805 & 27 \\ - 54 & \hline \hline 240 & 289 \\ - 216 & \hline \hline 245 & \text{c d u} \\ - 243 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

On peut donc écrire que $7805 = 289 \times 27 + 2$ avec $2 < 27$

Le quotient euclidien de 7805 par 27 est égal à 289, le reste est 2.