S9. Autour de la MULTIPLICATION
Calcul posé, calcul réfléchi, calcul instrumenté

Mise en route[1]

A. Un peu de calcul mental… et des propriétés à savoir nommer…

1. 36×6 36×25 36×39 36×44 36×36

2. Effectuer la multiplication 1235×43, puis sans effectuer de nouvelles multiplications, déduire des résultats précédents les produits suivants 1236×43 ; 44×1235 ; 1236×44 ; 1238×43.

B. La méthode égyptienne

Voici un exemple de la manière qu'avaient les Egyptiens de multiplier deux nombres entre eux :

25	35
~~12~~	~~70~~
~~6~~	~~140~~
3	280
1	560
	875

25x35=875

On convient d'appeler colonne de gauche la colonne des nombres : 25 ; 12 ; 6 ; 3 ; 1. Dans l'exemple fourni, la colonne de gauche comporte 5 lignes.

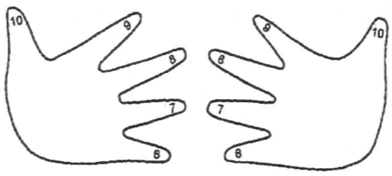
On convient d'appeler colonne de droite la colonne des nombres : 35 ; 70 ; 140 ; 280 ; 560.

1. En utilisant le procédé égyptien, calculer 186×31.

2. Justifier, à partir de l'exemple 25×35, la validité de l'algorithme de calcul des Egyptiens.

3. Construire un exemple de multiplication de deux nombres, exemple dans lequel la colonne de gauche comporte 8 lignes et où l'on barre toutes les lignes, sauf la dernière.

C. L'art de compter sur les doigts



Ou comment multiplier deux nombres compris entre 6 et 10 : en regardant simultanément les paumes des mains et en plaçant les doigts de même nom en vis-à-vis, on les numérote de 6 à 10 en partant du petit doigt. Les extrémités des doigts se touchant presque, on place en contact les deux doigts correspondants aux nombres à multiplier. Les doigts libres 'en haut' en les multipliant donnent les unités du résultat, le nombre de doigts restants donne les dizaines du résultat.

[1] B. Limoges 99 ; C. Guyane 2004

Catherine Marchetti-Jacques
Digitally signed by Catherine Marchetti-Jacques
DN: cn=Catherine Marchetti-Jacques, o=PariMaths.com, ou, email=info@parimaths.com, c=FR
Date: 2010.09.09 09:10:04 -06'00'

© PariMaths.com

1. Vérifier avec $7 \times 7 = 49$ *et* $8 \times 7 = 56$.

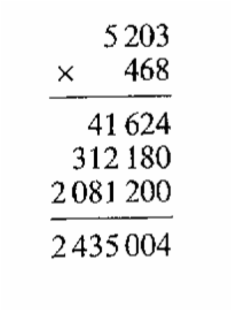
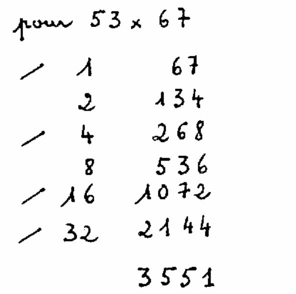
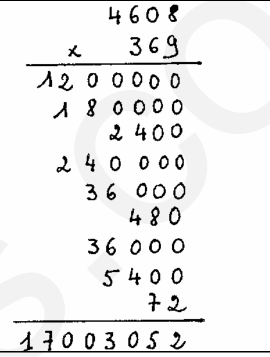
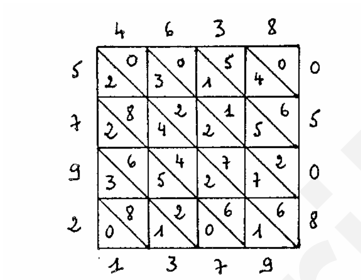
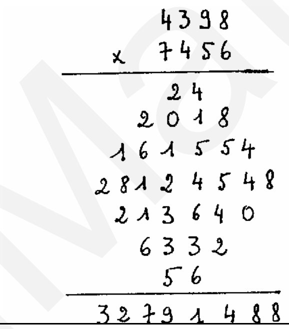
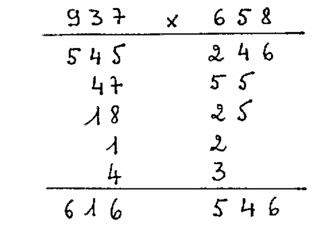
2. Que se passe - t'il pour 6×7 ? Comment adapter la méthode ? Y-a-t-il d'autres cas semblables ?

3. En nommant les deux nombres *x et y*, justifier la méthode.

Pour s'exercer[2]

Exercice 1

Retrouver le mode de fonctionnement de chacune de ces méthodes :

Méthode classique	Méthode russe (ou égyptienne)	Méthode grecque ou romaine
5203×468= 2435004	53×67=3551	4608×369=17003052
		
Méthode per gelosia	Méthode per rombo	Méthode per copa
2975×4638=13798050	4398×7456=32791488	937×658=616546
		

Exercice 2

Le but de l'exercice est de trouver une règle de calcul mental qui permette de calculer le produit de deux nombres entiers naturels strictement inférieurs à 100 tels que :

- Le chiffre des dizaines soit le même
- La somme de leurs chiffres des unités soit 10

Enoncez cette règle et prouvez-la. Puis appliquez-la à deux exemples.

Exercice 3

On remarque que :

$65^2 = 4225$ *et que* $6 \times 7 \times 100 + 25 = 4225$.

$145^2 = 21025$ *et que* $14 \times 15 \times 100 + 25 = 21025$

$1275^2 = 1625625$ *et que* $127 \times 128 \times 100 + 25 = 1625625$

© ParMaths.com

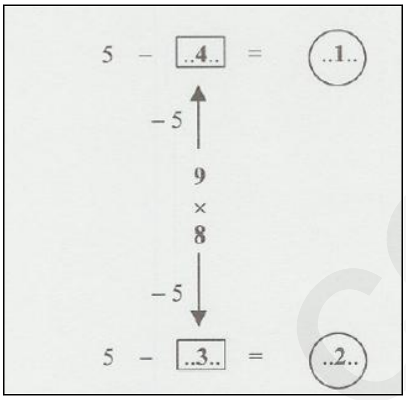
a. Généraliser cette remarque en proposant une relation mathématique.

b. Vérifier cette relation sur deux autres exemples.

c. Démontrer cette relation.

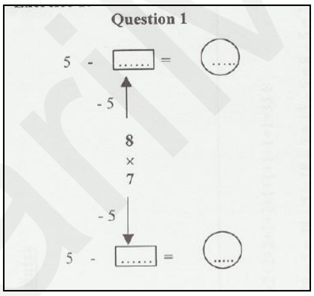
Exercice 4

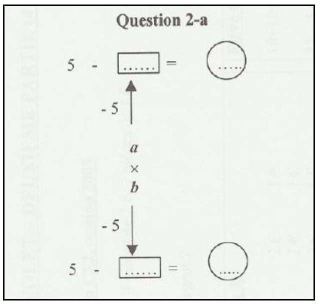
Voici une méthode pour retrouver les résultats des tables de multiplications quand les deux facteurs sont supérieurs à 5 et que les autres résultats sont connus.



- On complète le diagramme ci-contre (exemple 9×8).
- Ensuite, on ajoute la somme des deux nombres encadrés multipliée par 10 au produit des deux nombres entourés.
- Dans l'exemple ci-contre, cela donne : $(4+3)\times 10+(1\times 2)=7\times 10+2=72$.

1. Compléter, sur le schéma ci-dessous, le diagramme correspondant à 8×7 ainsi que le calcul.
2. On veut maintenant effectuer le produit $a\times b$.
   a. Compléter, sur la feuille annexe, le diagramme.
   b. Montrer que le calcul issu du diagramme s'exprime sous la forme : $10(a+b-10)\ +(10-a)(10-b)$
   c. En déduire que le calcul issu du diagramme s'exprime bien sous la forme $a\times b$.





Exercice 5

On considère le nombre $A=92\ 865\ 317\times 814\ 975$

1. Déterminez le nombre de chiffres de A.
2. Démontrez que le chiffre des dizaines est 7 et que le chiffre des unités est 5.
3. Les calculatrices courantes ne donnent pas directement tous les chiffres du nombre A.

Sans utiliser la technique opératoire usuelle de la multiplication, c'est-à-dire sans "poser l'opération" $92\ 865\ 317\times 814\ 975$, décrivez un procédé qu'utilise une calculatrice affichant dix chiffres et qui permette de déterminer tous les chiffres du nombre A.

[2] Besançon 2003 - Orléans 2004 - Dijon 2003 - Créteil 1999- Besançon 2002

© PariMaths.com

Exercice 6

1. Montrer que la somme de tous les nombres de la table de Pythagore (table de multiplication des entiers compris entre 1 et 9) est égale à 45×45.
2. On considère la table de multiplication ci-dessous dont on isole une figure en forme de croix. Soit C le terme central et S la somme des quatre éléments grisés entourant l'élément central. Calculez $\frac{S}{C}$.

   Choisissez une autre croix et calculez de nouveau $\frac{S}{C}$. Que remarquez-vous ? Pouvez- vous généraliser votre observation.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Exercice 7

Le but de l'exercice est de trouver une règle de calcul mental qui permette de calculer le produit de deux nombres entiers naturels strictement inférieurs à 100 tels que leur chiffre des dizaines soit le même et la somme de leurs chiffres des unités soit 10. Enoncez cette règle et prouvez-la. Appliquez-la à deux exemples.

☞ A retenir

Le calcul, procédure utilisée pour résoudre des problèmes et mis en œuvre dès le cycle 2, remplace progressivement les procédures de comptage ou dénombrement ou les procédures de distribution comme dans les problèmes de partage. Différentes formes de calcul sont utilisées.

Le calcul mental, dit réfléchi, fait appel à des techniques spécifiques, et nécessite de l'entrainement pour gagner en rapidité. Il s'appuie sur les propriétés des opérations : commutativité, associativité, distributivité…..et sur les résultats automatisés des répertoires de calcul mis en place dès l'école.

Le calcul posé demande, comme son nom l'indique, à poser l'opération. Selon les pays, diverses techniques sont utilisées. L'apprentissage de ces techniques relève toute de l'école primaire.

Le calcul instrumenté est celui qui s'effectue grâce aux instruments de calcul : calculette, calculatrice, tableur… Il nécessite la prise en main de l'instrument avec sa performance mais aussi ses limites, en particulier la confiance qu'on lui accorde, au-delà du sens de certains résultats obtenus !

➘ Penser donc à vous assurer de la cohérence de vos résultats, au regard du contexte de vos énoncés, en particulier concernant les ordres de grandeur.

© PariMaths.com

Quatre opérations sont définies dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$: l'addition, la soustraction, la multiplication, la division. La somme (a+b), la différence (a-b), le produit $(a\times b)$, le quotient $(\frac{a}{b}\ avec\ b\neq 0)$ de deux réels sont respectivement le résultat de ces quatre opérations.

Dans $\mathbb{N}$, on peut noter plus particulièrement que la somme et le produit de deux entiers naturels sont des entiers naturels. Par contre, ce n'est pas le cas de la différence et du quotient de deux entiers. Il suffit de prendre respectivement un contre exemple pour voir que les deux réponses sont négatives, par exemple pour 2 et 5 : d'une part 2-5 = -3 et $-3\notin\mathbb{N}$, d'autre part $2\div 5=0,4$ *et* $0,4\notin\mathbb{N}$

Le produit de deux réels *a et b*[3] peut se définir comme le résultat d'une somme de b termes égaux à a, ou comme le résultat d'une somme de a termes égaux à b $\quad a\times b=b\times a=\underbrace{a+a+...+a}_{b\ \text{termes}}=\underbrace{b+b+...+b}_{a\ \text{termes}}$.

On dit que a *et* b sont les deux facteurs de ce produit, d'où le terme ' factorisation' qui consiste à ' écrire sous forme de produit de facteurs'.

Pour tout réel a, $1\times a=a\times 1=a$ (1 est élément neutre de la multiplication)

Pour tout réel a, $a\times 0=0\times a=0$ (0 est élément absorbant de la multiplication)

Cette propriété et sa réciproque s'énoncent généralement sous la forme : « Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit qu'un des facteurs soit nul. ».

Les propriétés des opérations

On se place ici dans l'ensemble des réels.

L'addition et la multiplication sont commutatives et associatives

Pour tous réels a, b et c

commutativité : $a+b=b+a \qquad a\times b=b\times a$

associativité : $(a+b)+c=a+(b+c) \qquad (a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

Ainsi $119+31=119+(1+30)=(119+1)+30=120+30=150$ et $65\times 20=65\times(2\times 10)=(65\times 2)\times 10=1300$

Prudence avec la soustraction et la division qui ne sont ni commutatives, ni associatives.

Il est clair que si $10-2=8$, pourtant $2-10=-8$, et alors que $10:5=2$ on voit que $5:10=\frac{1}{2}$

Par ailleurs $(125-100)-25=25-25=0$ alors que $125-(100-25)=125-75=50$

La division amène parfois plus de doutes, pourtant un exemple parmi d'autres prouve sa non-associativité. Ainsi : $(100:10):2=10:2=5$ alors que $100:(10:2)=100:5=20$, et plus généralement, sous forme fractionnaire :

Pour tout a, b, c, avec b *et* c non nuls, $(a:b):c=\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$ alors que $a:(b:c)=a:\frac{b}{c}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$

La multiplication est distributive sur l'addition et la soustraction

Pour tous réels a, b et c : $a(b+c)=a\times b+a\times c \qquad a\times(b-c)=a\times b-a\times c$

Ainsi $24\times 15 = 24\times 10+24\times 5$ *ou* $24\times 99=24\times 100-24\times 1$

[3] Nous verrons ailleurs d'autres façons de définir le produit de deux nombres

© PariMaths.com