D13C. Autour des Calculs Multiplicatifs
En Cycle 3

Ce fichier, corrigé du fichier **D13**, vous propose une découverte de l'apprentissage du calcul, tout particulièrement dans le domaine multiplicatif. Les travaux d'élèves présentés abordent le calcul réfléchi ainsi que le calcul posé tout au long du cycle 3, ainsi que les extraits de manuels relatifs à l'apprentissage de la technique opératoire de la multiplication, en lien avec notre numération décimale.

☞ Des compléments sur les calculs multiplicatifs sont présentés en fin de fichier.

Les réponses apportées ne sont pas exhaustives. Elles dépassent cependant parfois celles attendues dans le cadre du concours, pouvant ainsi enrichir votre vue sur d'autres travaux proposés ou sur l'apprentissage en général.

I. Résolution de problème en CE2[1]

L'activité proposée se déroule à l'école primaire, dans une classe de première année du cycle 3 dans laquelle, auparavant, ont été abordés les points suivants : l'addition (résolution de problèmes additifs, technique de l'addition) et la multiplication (introduction du signe $\times$, résolution de problèmes multiplicatifs simples, calcul du produit de deux nombres dont l'un a un chiffre, calcul du produit d'un nombre entier par 10 et par 100). Elle précède l'étude de la technique usuelle de la multiplication par un nombre de deux chiffres.

Les élèves sont invités à résoudre individuellement, par écrit, le problème ci-dessous :

Le directeur de l'école a reçu, pour ses classes, un colis qui contient 34 boîtes de crayons de couleur. Dans chaque boîte, il y a 12 crayons de couleur. *Combien y a-t-il de crayons de couleur dans ce colis ?*

1. Analysez les procédures correctes en explicitant la démarche de chaque élève, et leur lien éventuel avec les propriétés de la multiplication.

Les élèves A, B et D ont des procédures de résolution correctes, bien que l'élève B énonce dans sa phrase de conclusion une réponse fausse.

L'élève A reconnaît que la résolution de ce problème relève d'une multiplication 34×12. Certainement gêné par la méconnaissance de la technique nécessaire pour effectuer ce calcul, il effectue une addition itérée du nombre 34, douze fois. Cette procédure revient à visualiser successivement les 34 crayons d'une même couleur (34 rouges, 34 bleus, 34 verts….), en prenant en compte les douze couleurs. La situation proposée inciterait davantage à calculer la somme de 34 termes égaux à 12, visualisant ainsi le contenu des 34 boites,

[1] D'après Limoges 1998 ; Dijon 2001

mais cette addition serait plus longue. On peut donc imaginer que cet élève applique implicitement la commutativité de la multiplication $34\times12=12\times34$ et choisit la représentation additive la plus économique. Il calcule la somme des unités sous forme d'une multiplication d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre $12\times4=48$, et note sa retenue 4 dans la colonne des dizaines. Là encore le calcul de la somme des dizaines est écrit en ligne, avec une multiplication et la prise en compte de la retenue $(12\times3)+4=40$. Son calcul est juste ainsi que sa conclusion.

Elève A	**Elève B**	**Elève D**
$34\times12=408$ $12\times4=48$ $(12\times3)+4=40$ 34+34+34+34+34+34+34+34+34+34+34+34 = 408 Il y a 408 crayons de couleur	$34\times12=408$ $34\times10=340$ $34\times2=68$ $340+68=408$ Il a reçu 340 crayons de couleur.	12×34 48 +360 408 il y a 408 crayons de couleur.

L'élève B reconnaît que la résolution de ce problème relève d'une multiplication 34×12, et note le résultat sans doute après avoir fait à droite ses calculs intermédiaires. Ce résultat est juste, mais on peut d'ores et déjà signaler que sa phrase de conclusion est fausse, sans doute parce qu'il a pris en compte un résultat intermédiaire par étourderie. Pour calculer 34×12, dont il ne connaît pas la technique opératoire en calcul posé, il décompose son calcul en appliquant la distributivité de la multiplication :

$34\times12=34\times(10+2)=34\times10+34\times2=340+68=408$. Cette procédure correcte amène l'élève à effectuer des calculs connus, multiplication par 10 avec la règle des zéros, et multiplication par 2. L'addition des calculs intermédiaires est juste, la retenue bien prise en compte dans le rang des dizaines.

L'élève D reconnaît que la résolution de ce problème relève d'une multiplication et pose 12×34. Il connaît la technique de la multiplication posée d'un nombre à deux chiffres par un nombre à deux chiffres. Son calcul est correct, son résultat juste, sa conclusion exacte.

Cette technique, qui est explicitée dans le document III, s'appuie sur la décomposition de 34 suivant la numération décimale $4+30$, et respectivement sur la distributivité et l'associativité de la multiplication $12\times34=12\times(4+30)=(12\times4)+(12\times30)=48+360=408$, ainsi que la règle des zéros : $12\times30=12\times(3\times10)=(12\times3)\times10=360$

2. Pour les procédures de calcul incorrectes, émettre des hypothèses sur l'origine des erreurs commises.

Ces trois élèves reconnaissent la résolution de ce problème comme relevant de la multiplication 34×12. Les procédures sont incorrectes, les résultats faux et la conclusion fausse.

Elève C	**Elève E**	**Elève F**
$34\times12=68$ $34\times12=68$ Il y a dans ce colis, 68 crayons	$34\times12=38$ il y a 38 crayons	$34\times12=38$ 34×12 680 +430 1110

L'élève C effectue correctement la première étape de ce calcul posé, en calculant $34 \times 2 = 68$, comme dans la multiplication par un nombre à un chiffre, mais il oublie de poursuivre sa multiplication au rang des dizaines ou s'arrête ne sachant pas comment faire.

L'élève E multiplie les unités entre elles et les dizaines entre elles. Ainsi $4 \times 2 = 8$ *et* $3 \times 1 = 3$. Ces deux résultats intermédiaires ne comportant pas de retenue, il s'en tient à ce résultat final 38.

L'élève F tente d'effectuer cette multiplication à deux chiffres, en s'appuyant sur ce qu'il connaît. Il effectue correctement la première étape, si ce n'est qu'il ajoute un 0, sans doute au moment de l'addition faute d'avoir aligné correctement le résultat de la deuxième ligne. Ce résultat comporte bien un zéro, lui conférant bien son statut de dizaines ($34 \times 10 = 340$), mais une confusion s'est glissée dans son écriture puisque les chiffres sont intervertis (430). On peut se demander aussi si cet élève sachant qu'il faut décaler la deuxième ligne par rapport à la première (rang des dizaines) n'a pas décalé son résultat 430 vers la droite plutôt que vers la gauche. L'élève n'a pas non plus aligné correctement le 8 des unités avec le 0 des unités de la ligne suivante. Cela l'amène probablement à compléter sa première ligne en écrivant 680 dans l'addition.

II. Analyse de travaux d'élèves en calcul réfléchi

A. Un enseignant propose à des élèves du cycle 3 de calculer mentalement 24×4 et d'écrire sur une feuille *ce qu'ils ont fait dans leur tête.*

Voici quelques-unes des réponses obtenues :

A	J'ai fait 4 fois 20, quatre-vingts, et 4 fois 4, seize.
B	24 et 24 font 48, 48 et 48 font 96.
C	J'ai fait 100 – 4.
D	J'ai fait 4 fois 4 ; 16 ; 6 et 1 de retenue ; puis j'ai fait 4 fois 2 ; 8.
E	J'ai fait 4 fois 12 ; 48 ; 48 et 48 font 96.
F	J'ai fait 4 fois 8 ; 32 ; puis 3 fois 32 ; 96.

1. Appliquez chacune des six procédures au calcul 52 × 4. Vous préciserez les propriétés de la multiplication utilisées.

	$52 \times 4 = 208$	
A	J'ai fait 4 fois 50, deux cents, et 4 fois 2, huit.	Distributivité de la multiplication/addition $52 \times 4 = (50+2) \times 4 = 50 \times 4 + 2 \times 4$
B	52 et 52 font 104, 104 et 104 font 208.	Passage par le double. Associativité $52 \times 4 = 52 \times (2 \times 2) = (52 \times 2) \times 2$
C	J'ai fait 200+8.	Décomposition de 52 en 50+2, par rapport à la dizaine la plus proche Distributivité : $(50+2) \times 4 = 50 \times 4 + 2 \times 4$
D	J'ai fait 4 fois 2 ; 8 ; puis j'ai fait 4 fois 5 ; 20.	Opération réalisée de tête en calcul posé.

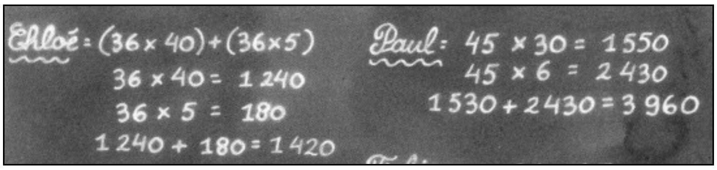
		Multiplication des unités, puis des dizaines. Ici pas de retenue.
E	J'ai fait 4 fois 8 ; 32 ; puis 3 fois 32 ; 96.	Décomposition de 24 à partir des tables de multiplication, $24\times4=(8\times3)\times4=8\times4\times3=96$ Associativité et commutativité La décomposition de 52 à partir des tables de multiplication ne donne rien. La seule décomposition serait $52=26\times2=13\times2\times2$ mais la multiplication de 13 par 4 n'est pas plus facile.

2. *L'élève A* utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, en décomposant le premier facteur. *L'élève D* n'utilise pas une procédure de calcul réfléchi. Il effectue l'opération de tête comme si elle était posée. Si l'enseignant veut contraindre cet élève à ne plus utiliser cette procédure, il va devoir choisir des produits présentant un obstacle quand la multiplication est posée. L'enseignant peut lui proposer un produit de type 24×7. La présence de la retenue peut perturber sa procédure, s'il ne sait pas comment la prendre en compte, et l'amener à un résultat faux comme 1428. De même un produit de type 64×5 peut aussi l'amener à un résultat faux comme 3020. La décomposition lui permettra de donner du sens au rang de chaque chiffre : $64\times5=(60+4)\times5=300+20=320$ et $24\times7=(20+4)\times7=140+28=168$. Un produit de type 502×7 peut aussi l'amener à un résultat faux en ne sachant pas prendre en compte le zéro, par exemple 35014... Là encore la distributivité donnera du sens à la valeur de chaque chiffre : $502\times7=(500+2)\times7=3500+14=3514$

3. *L'élève C* décompose un des facteurs par rapport à la dizaine/centaine la plus proche, les tables étant alors plus accessibles. Cette procédure est couramment utilisée pour calculer les produits du type …
$19\times4=(20-1)\times4$ *ou* $299\times4=(300-1)\times4$ *ou encore* $42\times6=(40+2)\times6=240+12=252$

B. Quatre élèves viennent de calculer 36×45, mentalement, sans poser l'opération.

1. Analyser chaque production : procédures, propriétés mathématiques utilisées, erreurs éventuelles.



Chloé fait une décomposition additive de 45 en $40+5$, puis elle applique la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. $36\times45=36\times(40+5)$ $\quad$ $36\times(40+5)=(36\times40)+(36\times5)$.

Sa démarche est correcte. Pour effectuer ses calculs, elle utilise la table des 4, la table des 5, et *la règle du zéro* pour multiplier par 40, c'est-à-dire pour multiplier par 10 après avoir calculé le produit par 4.

Par contre dans les calculs multiplicatifs qui suivent, elle fait une erreur en calculant 36×40 qui est égal à 1440 au lieu de 1240. C'est sans doute une erreur de retenue oubliée si elle a posé 'dans sa tête' la multiplication ($6\times4=24 \quad 3\times4=12$). La deuxième multiplication est juste, ainsi que son addition par rapport à ses résultats intermédiaires.

Paul fait une décomposition additive de 36 en $30+6$.

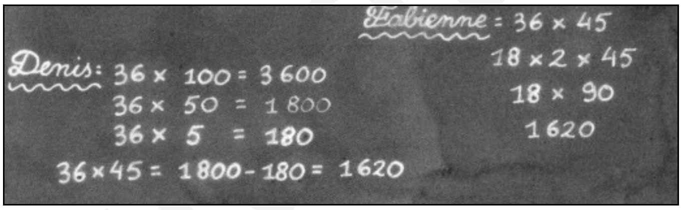
Il utilise implicitement la commutativité $36\times45=45\times36$, puis la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sans l'écrire. Sa démarche est correcte.

Dans les calculs multiplicatifs qui suivent, il commet deux erreurs.

$45\times6=2430$ au lieu de 270 : Non prise en compte de la retenue. Il juxtapose les résultats 24 et 30 des deux multiplications partielles : $4\times6=24$ *et* $5\times6=30$

$45\times30=1550$ au lieu de 1350. L'erreur est ici plus difficile à expliquer. On peut penser au regard de la procédure de juxtaposition dans la deuxième multiplication, qu'il a tenté une procédure directe de multiplication par un nombre à deux chiffres : dans un premier temps il a effectué 5×30 en le décomposant : $5\times3=15$, puis il juxtapose $5\times10=50$, oubliant ensuite la multiplication du rang des dizaines (4).

Dans le calcul additif de la fin, il y a une erreur de recopie 1550 est remplacé par 1530. Son addition est correcte avec ses résultats intermédiaires.



Denis procède par essais à partir de multiplications connues pour trouver une décomposition soustractive de 45 sous la forme 50-5, sachant que 50 est la moitié de 100. Il utilise ensuite la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction $36\times(50-5)=(36\times50)-(36\times5)$ Ces calculs sont justes.

Dans les calculs multiplicatifs qui suivent, il utilise le fait que 50 est la moitié de 100, ainsi que les règles de la multiplication par un nombre fractionnaire $36\times50=36\times\frac{100}{2}=\frac{36\times100}{2}$, ou une règle implicite $36\times50=36\times(100:2)=(36\times100):2$, propriété en acte de l'associativité de la multiplication appliquée ici entre multiplication et division mais **attention**

$36:(100\times2)\neq(36:100)\times2$ *car* $\frac{36}{100\times2}=\frac{36}{200}=0{,}18$ *alors que* $\frac{36}{100}\times2=0{,}72$.

Fabienne fait une décomposition multiplicative de 36 avec les doubles ($36=18\times2$), c'est-à-dire reconnaît en 36 un multiple de 2, puis utilise l'associativité de la multiplication $36\times45=(18\times2)\times45=18\times(2\times45)$.

Cette procédure lui permet de passer d'une multiplication par un nombre à deux chiffres à des multiplications par un nombre à un chiffre. Elle calcule à nouveau avec les doubles connus 2×45, puis effectue $18 \times 90 = 1620$ sans erreur. Ses calculs sont justes.

2. Dans le même temps, quatre autres élèves doivent chercher le résultat en posant l'opération.

Léo : 1230 Arthur : 1620 Julie : 1944 Zoé : 324

Ces résultats sont-ils justes ? Analyser l'origine des erreurs, en posant l'opération faite par l'élève. Proposez une aide éventuelle.

A partir du calcul posé, seule la réponse d'*Arthur* est correcte : 1620

$\begin{array}{rrrr} & 3 & & 6 \\ \times & 4 & & 5 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr} & & 3 & 6 \\ & \times & 4 & 5 \\ \hline & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & . \\ \hline 1 & 9 & 4 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{rrr} & 3 & 6 \\ \times & 4 & 5 \\ \hline 1 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 2 & 4 \end{array}$

Léo trouve 1230. Il juxtapose les résultats 12 et 30 des deux multiplications partielles 3×4 *et* 6×5. L'articulation de la technique opératoire en lien avec la numération décimale n'est pas maitrisée. U*ne aide : proposer des calculs à difficultés croissante, pour faire prendre conscience du rang de chaque chiffre par rapport à la numération, en revenant à la représentation rectangulaire.*

Julie trouve 1944. Elle effectue son opération en commençant par le chiffre des dizaines du deuxième nombre (4×6), sans prendre en compte que le chiffre 4 et le résultat de 4×6 est au rang des dizaines. Il en est de même à la deuxième ligne quand elle effectue son décalage, alors que cette fois le chiffre 5 et le résultat de 5×6 sont au rang des unités. U*ne aide : redonner la convention de démarrage de droite à gauche et écrire 0 à la place du 'point' pour redonner du sens à la valeur de chaque rang*.

Zoé trouve 324. Elle a oublié de décaler le rang des dizaines et à ajouter directement 180 et 144. U*ne aide : redonner du sens avec la représentation rectangulaire*.

III. Technique opératoire de la multiplication CE2

1. Quel est l'objectif commun à ces trois fiches ? Quelles connaissances préalables les élèves doivent-ils posséder pour aborder cet objectif ?

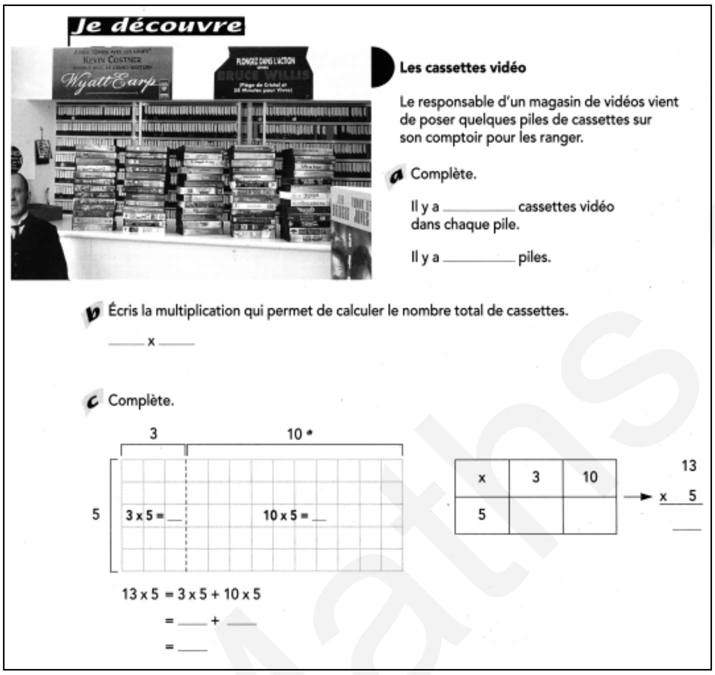
L'objectif commun est celui de l'apprentissage de la technique opératoire de la multiplication posée d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un (annexes 4 et 5) ou plusieurs (annexe 3) chiffres. Cette technique s'appuie sur la connaissance de la numération.

Les élèves doivent être capables de décomposer un nombre dans la base dix, doivent connaître les tables avec les répertoires de calculs automatisés. Ils doivent aussi connaître la distributivité de la multiplication sur l'addition qui permet de décomposer le produit initial en produits plus simples à calculer, connaître la règle du zéro, et la technique opératoire de l'addition.

2. Caractériser, en les comparant le contenu et la démarche de chacune de ces trois fiches ? Précisez le rôle du quadrillage et la propriété sous jacente.

Dans chacune de ses fiches, l'élève est invité à reproduire la démarche présentée et détaillée étape par étape.

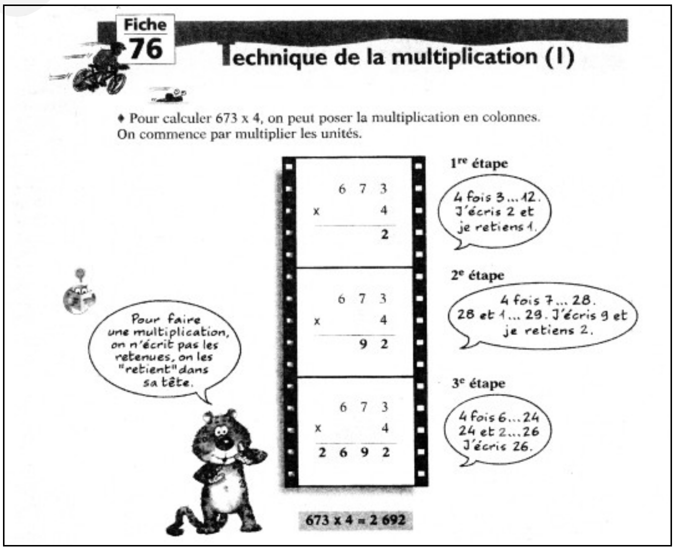
Dans l'annexe A, une introduction contextualisée donne du sens à ce quadrillage, en liant la situation rangée/pile à la représentation lignes/colonnes. Celle-ci permet alors de visualiser les calculs intermédiaires, grâce à la distributivité de la multiplication. Les unités sont à gauche, les dizaines à droite, dans l'ordre où les calculs s'effectuent lors du calcul posé.



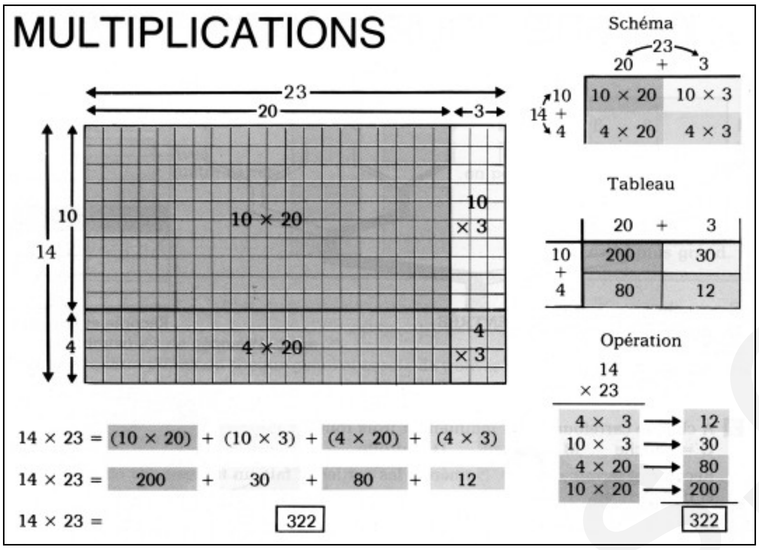
Les calculs illustrés grâce au quadrillage sont ensuite retranscrits dans un tableau à double entrée, pour préparer les calculs intermédiaires qui sont ensuite retranscrits dans l'opération posée en colonne.

Dans l'annexe B, le film de la technique liste, les unes après les autres, les étapes de l'algorithme de la multiplication par un nombre à un chiffre. Les messages sont directifs, peu révélateurs de sens, ne laissant aucune place à des procédures personnalisées, comme l'écriture de la retenue pour alléger la mémoire, « *dans les multiplications, on n'écrit pas les retenues, on les retient dans sa tête* » !

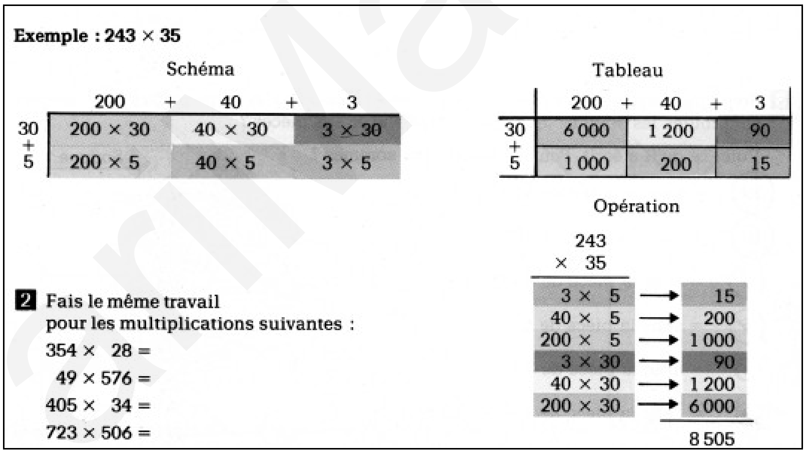
Les élèves doivent reproduire le modèle proposé. On a ici un modèle d'apprentissage dit « transmissif ».



Dans l'annexe C, la représentation du quadrillage traduit la décomposition canonique des deux nombres en jeu dans la multiplication. Les dizaines sont à gauche, les unités à droite comme dans l'écriture du nombre et dans la technique usuelle. Le quadrillage donne accès à ce calcul, pas encore connu des élèves, en leur proposant une étape intermédiaire avant la technique « experte » qui sera mise en place ensuite.



3. Effectuer avec notre technique usuelle, la multiplication posée de 243 × 35, dernière opération de l'annexe C. En prolongement de cette annexe, décrire l'algorithme que vous énonceriez en classe, en explicitant plus particulièrement les étapes de calculs intermédiaires. Préciser les aides possibles.



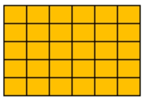
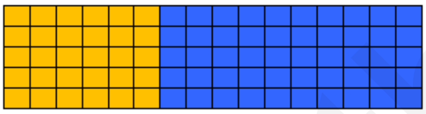
1 2 1 2 4 3 × 3 5 1 1 2 1 5 7 2 9 . 8 5 0 5	On va demander aux élèves d'effectuer le produit de 243 par 5. A ce stade, cet algorithme est connu : 5fois 3, quinze unités, j'écris 5 unités et je retiens 1 dizaine / 5 fois 4, 20 dizaines plus 1, 21 dizaines, j'écris 1 dizaine et j'en retiens 20, soit 2 centaines / 5 fois 2, 10 centaines plus 2, 12 centaines. Pour le passage à la seconde ligne, on soulignera que le chiffre 3 est au rang des dizaines ; c'est donc une multiplication par 30 qui est opérée, qui se traduit par l'écriture du 0 final (*à droite*). L'algorithme est alors le même que le précédent. Les résultats intermédiaires étant alignés à droite, l'addition ne pose alors pas de problème.	1 2 1 2 4 3 × 3 5 1 1 2 1 5 7 2 9 0 8 5 0 5

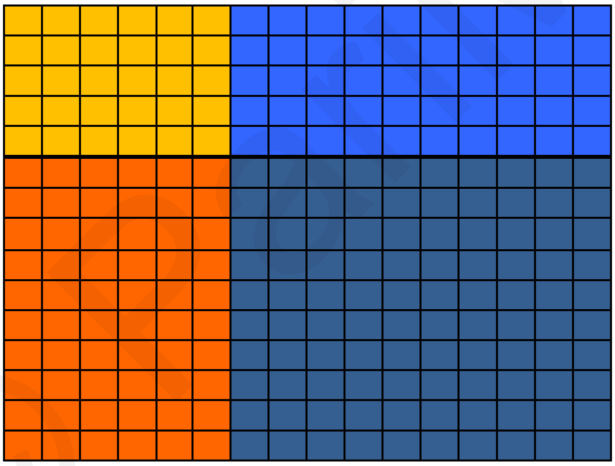
	En aide, on peut proposer la table des 5 et la table des 3 ou les faire reconstruire au préalable, et autoriser, voire conseiller l'écriture des retenues. L'écriture du point usuel, sera évoquée plus tard pour les élèves ayant de l'expertise dans la technique.	

En conclusion,

Des rappels sur les propriétés de la multiplication sur lesquelles s'appuie la technique opératoire sont proposés dans les fichiers **D11C** et **D12C.**

La structure multiplicative peut se représenter dans une configuration rectangulaire qui permet de visualiser la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Différentes étapes de la configuration rectangulaire. 6×5 *puis* 16×5 *puis* 16×15			
		$\begin{array}{r} {\color{red}3} \\ 16 \\ +16 \\ +16 \\ +16 \\ +16 \\ \hline 80 \end{array}$	$\begin{array}{r} {\color{red}3} \\ 16 \\ \times\ 5 \\ \hline 80 \end{array}$ 6 fois 5 trente, 0 unités et 3dizaines…
6×5	$16\times5=(10+6)\times5=(6+10)\times5$		$6\times5+10\times5=30+50=80$

	$\begin{array}{rl} 16 & \\ \times\ 15 & \\ \hline 30 & 6\times5=30 \\ +\ \ 50 & 10\times5=50 \\ +\ \ 60 & 10\times6=60 \\ +100 & 10\times10=100 \\ \hline 240 & \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ 16 \\ \times15 \\ \hline 80 \\ 160 \\ \hline 240 \end{array}$ 6 fois 5 trente, 0 unités et 3dizaines… 10 fois 6, soixante, 10 fois 10, 100, soit 160 unités notées plus tard 16 dizaines avec un décalage
$16\times15=(10+6)\times15=10\times15+6\times15$ $10\times(10+5)+6\times(10+5)=10\times10+10\times5+6\times10+6\times5$	$100+50+60+30=240$	