D17C. Autour des Nombres Decimaux en Cycle 3

Ce fichier, corrigé du fichier **D17**, aborde l'apprentissage des nombres décimaux en Cycle 3. L'analyse de cette séquence d'apprentissage vous montre les deux approches usuellement choisies pour construire cette nouvelle notion, le nombre décimal dans le contexte social usuel de la mesure (monnaie, longueur, masses…) et le nombre décimal comme autre écriture d'une fraction décimale.
Les réponses apportées ne sont pas exhaustives. Elles dépassent cependant parfois celles attendues dans le cadre du concours, pouvant ainsi enrichir votre vue sur d'autres travaux proposés ou sur l'apprentissage en général.

Analyse d'une séquence d'apprentissage[1]

1. Etude générale de la séquence

a. Quel est l'objectif de cette séquence d'apprentissage, extraite d'un manuel de l'élève[2] ?

Cette séquence porte sur l'introduction des nombres décimaux en CM1, en particulier l'écriture du nombre à virgule en lien avec les fractions décimales. C'est un des objectifs des programmes 2008 qui énoncent : « *À la fin du CM2 les élèves doivent être capables d'écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux et quelques fractions simples* ».

b. Préciser en quelques lignes l'articulation recherchée par les auteurs entre les trois chapitres.

Cette séquence aborde progressivement :

· le repérage sur la droite graduée de fractions simples puis de fractions décimales à partir du partage d'un segment unité.

· L'introduction du nombre décimal et du codage (virgule) de son écriture sous forme décimale

· Les différentes écritures d'un nombre décimal, en lien avec la numération décimale : $u+\frac{d}{10}+\frac{c}{100}\ldots$ et en particulier le codage avec la virgule $\overline{u,dc}$ où *u, d, c* représentent respectivement le chiffre *des unités, des dixièmes, des centièmes.*

c. Quels sont les pré-requis nécessaires pour commencer ce travail ?

---

[1] D'après Toulouse 1999.

[2] Maths en Flèche (CM1) Collection Diagonale (Nathan). Annexe 1 : pages 94- 95, Annexe 2 : pages 98-99, Annexe 3 : pages 100-101 NB : les pages 96 et 97 du livre, non données, n'ont rien à voir avec la progression étudiée.

Les principaux pré-requis nécessaires pour commencer ce travail portent sur la connaissance des fractions simples en particulier les fractions décimales, le repérage sur la droite graduée, la décomposition d'un nombre dans la numération décimale.

- savoir repérer et placer un point d'abscisse donnée sur la droite graduée
- savoir mesurer un segment sur la droite graduée
- connaitre le système de numération décimale (nom des rangs, tableau…)
- savoir décomposer un nombre en numération décimale

Au fur et à mesure de la séquence et des exercices, certaines autres connaissances sont sollicitées.

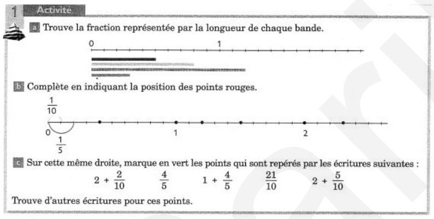
- savoir additionner des fractions simples. Cependant l'addition de fractions décimales peut aussi se faire en passant par les rangs de la numération, comme ajouter des 'dixièmes'.
- savoir utiliser la calculatrice pour écrire un nombre à virgule et faire des calculs simples du champ additif.
- connaître, dans un contexte familier de mesure (prix) l'usage des nombres décimaux
- connaître les unités de longueur et leur relation dans les conversions

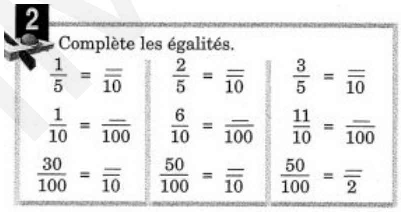
2. Etude des phases de la séquence

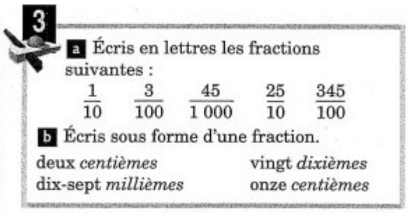
Annexe 1 : Citez les notions mathématiques travaillées dans chacun des exercices.

Les notions étudiées dans chaque exercice (.) sont :

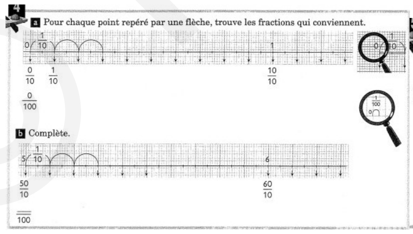
- Partage d'un segment unité en dix sous-unités (1)
- Repérage d'un point par une fraction décimale sur la droite graduée entre 0 et 1(1et 4)
- Egalité de différentes écritures fractionnaires par le repérage (1)
- Egalité de différentes écritures fractionnaires décimales (2)
- Passage de l'écriture littérale de fractions décimales à la forme fractionnaires et vice versa (3)

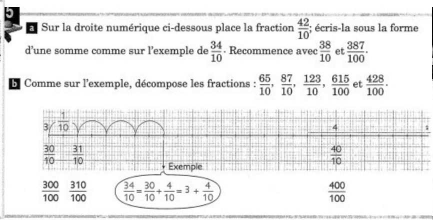


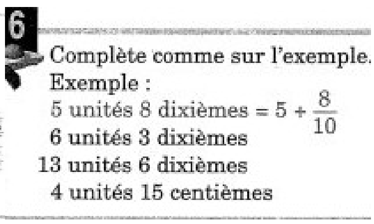




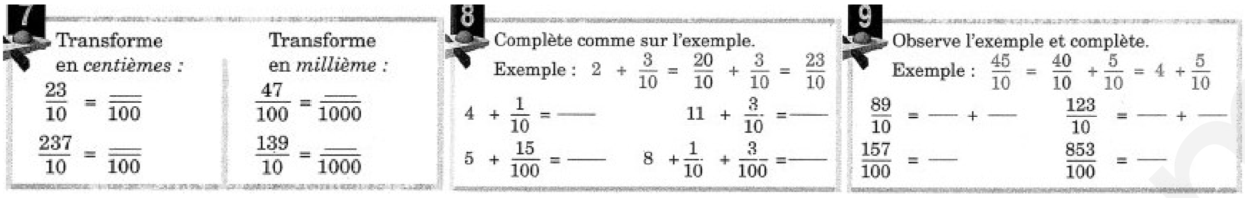
- Décomposer une fraction de la forme $\frac{D}{10}$ où D est un nombre entier en $u + \frac{d}{10}$ (5)
- Passage de l'écriture littérale de fractions décimales à la décomposition canonique(6)







- Transformation des écritures pour un même nombre sous la forme $u+\frac{d}{10}+\frac{c}{100}$ … et passage à l'écriture à virgule $\overline{u,dc}$ où *u, d, c* représentent respectivement le chiffre *des unités, des dixièmes, des centièmes (7, 8, 9)*



7 Transforme en *centièmes* :

$\frac{23}{10} = \frac{\ldots}{100}$

$\frac{237}{10} = \frac{\ldots}{100}$

Transforme en *millième* :

$\frac{47}{100} = \frac{\ldots}{1000}$

$\frac{139}{10} = \frac{\ldots}{1000}$

8 Complète comme sur l'exemple.

Exemple : $2 + \frac{3}{10} = \frac{20}{10} + \frac{3}{10} = \frac{23}{10}$

$4 + \frac{1}{10} = \ldots$ $\quad 11 + \frac{3}{10} = \ldots$

$5 + \frac{15}{100} = \ldots$ $\quad 8 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} = \ldots$

9 Observe l'exemple et complète.

Exemple : $\frac{45}{10} = \frac{40}{10} + \frac{5}{10} = 4 + \frac{5}{10}$

$\frac{89}{10} = \ldots + \ldots$ $\quad \frac{123}{10} = \ldots + \ldots$

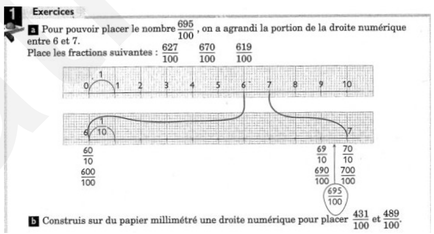
$\frac{157}{100} = \ldots$ $\quad \frac{853}{100} = \ldots$

Annexe 2 *:* Sur quelle conception du nombre décimal prend appui la présentation des décimaux de l'activité découverte ? Enoncez rapidement les différentes notions introduites dans les exercices1, 4 et 6. *(NDLR.* Faute de temps pour la rédactrice, les données sont restées en Francs, mais cela ne change rien sur le fond de la question).

- L'activité découverte présente des nombres à virgule qui sont interprétables comme la juxtaposition des deux entiers pour les prix : 24 francs et 65 centimes.
- L'exercice 1 introduit le zoom sur la droite graduée, et la notion de densité de l'ensemble des nombres décimaux. La notion d'encadrement est implicite.

1 Activité

Dans les publicités ci-dessous, on trouve beaucoup de nombres « à virgule ». Explique ce que signifient 6,95 F et 124,8 cm.

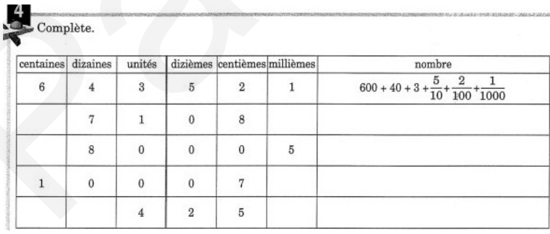


1 Exercices

a Pour pouvoir placer le nombre $\frac{695}{100}$, on a agrandi la portion de la droite numérique entre 6 et 7.
Place les fractions suivantes : $\frac{627}{100}$ $\frac{670}{100}$ $\frac{619}{100}$

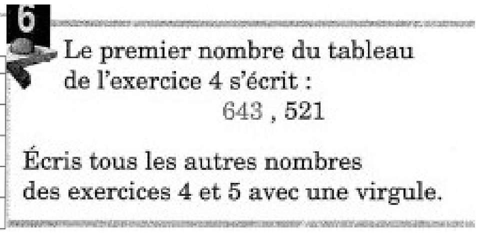
b Construis sur du papier millimétré une droite numérique pour placer $\frac{431}{100}$ et $\frac{489}{100}$.

- L'exercice 4 fait le lien avec le tableau de numération déjà connu. Il est prolongé *à droite* pour introduire les nouveaux rangs.
- L'exercice 6 introduit le codage de la virgule pour une nouvelle écriture des nombres décimaux.



4 Complète.

centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	nombre
6	4	3	5	2	1	$600+40+3+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}+\frac{1}{1000}$
	7	1	0	8		
	8	0	0	0	5	
1	0	0	0	7		
		4	2	5		



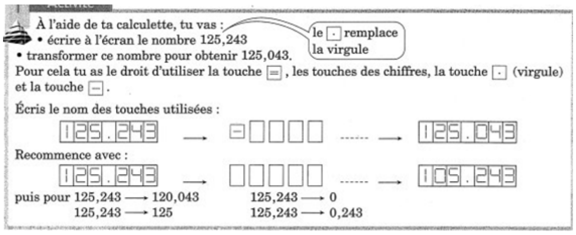
6 Le premier nombre du tableau de l'exercice 4 s'écrit :
643 , 521

Écris tous les autres nombres des exercices 4 et 5 avec une virgule.

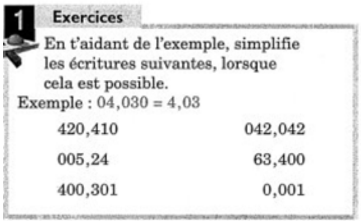
Annexe 3

a. Quel est l'objectif principal de l'activité d'introduction avec la calculatrice ? En quoi prépare t- elle à l'exercice 1 qui la suit ?

Ce travail à la calculatrice donne du sens au nombre décimal comme un nouveau nombre sur lequel l'élève peut agir, et dans ce cas calculer.



À l'aide de ta calculette, tu vas :
• écrire à l'écran le nombre 125,243
• transformer ce nombre pour obtenir 125,043.
Pour cela tu as le droit d'utiliser la touche $\boxed{=}$, les touches des chiffres, la touche $\boxed{\cdot}$ (virgule) et la touche $\boxed{-}$.
le $\boxed{\cdot}$ remplace la virgule
Écris le nom des touches utilisées :
125.243 → □□□□□ ...... → 125.043
Recommence avec :
125.243 → □□□□□ ...... → 105.243
puis pour 125,243 → 120,043 ; 125,243 → 0 ; 125,243 → 125 ; 125,243 → 0,243



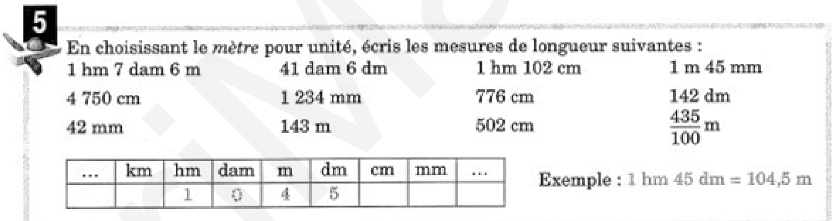
1 Exercices
En t'aidant de l'exemple, simplifie les écritures suivantes, lorsque cela est possible.
Exemple : 04,030 = 4,03

420,410	042,042
005,24	63,400
400,301	0,001

L'activité consiste à transformer une écriture en agissant sur un seul chiffre : pour passer de 125,243 à 125,043, il faut trouver quelle opération faire pour que 2 dixièmes deviennent 0 dixièmes, mais aussi auparavant repérer ce rang des dixièmes sur lequel porte la transformation pour le prendre en compte dans le calcul. Si l'élève repère qu'il faut agir sur le 2, mais enlève 2, il trouvera 123,243 ! L'activité donne donc du sens à la valeur de chaque chiffre dans le nombre décimal. Par ailleurs les exemples choisis ciblent tout particulièrement le chiffre 0 dans cette écriture : passer de 125,243 à 105, 243(dizaines), à 125 (partie décimale nulle), à 0, à 0,243 (partie entière nulle). En ce sens il prépare à l'exercice 1 qui va permettre à l'élève de réfléchir au statut du chiffre 0 dans une écriture de nombre décimal, et à simplifier ceux qui s'avèrent inutiles.

b. Analyser la référence aux unités de mesure présentes dans l'exercice 5 de l'Annexe 3 et dans l'exercice 1 de l'Annexe 1. Vous préciserez comment est introduit le millimètre dans chacun de ces exercices, et étudierez la pertinence de ce choix.

Dans l'exercice 5 de cette annexe, le mètre étant choisi comme unité, le millimètre est associé au millième du mètre, représenté ici par la troisième colonne à droite du mètre dans le tableau de numération.



5 En choisissant le *mètre* pour unité, écris les mesures de longueur suivantes :

1 hm 7 dam 6 m	41 dam 6 dm	1 hm 102 cm	1 m 45 mm
4 750 cm	1 234 mm	776 cm	142 dm
42 mm	143 m	502 cm	$\frac{435}{100}$ m

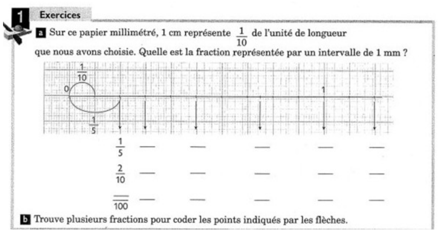
...	km	hm	dam	m	dm	cm	mm	...
		1	0	4	5			

Exemple : 1 hm 45 dm = 104,5 m

L'écriture fractionnaire n'est sans doute pas attendue, sauf pour interpréter la dernière donnée. Elle peut être cependant évoquée pour redonner du sens aux unités *dm, cm, mm* dans le partage de l'unité.

Par exemple $1234mm = \frac{1234}{1000}m = \frac{1000}{1000} + \frac{200}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{4}{1000} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} = 1{,}234m$

Dans l'exercice 1 de l'Annexe 1, le millimètre est associé à la fraction décimale $\frac{1}{100}$, comme dixième partie du centimètre sur la droite graduée, lui-même défini comme dixième partie de l'unité de longueur.



L'introduction des unités de mesure est pertinente car en lien avec les unités de longueur connues en CM1. Cependant, si ce lien avec la numération est pertinent dans le tableau de conversion de l'exercice 5, il l'est moins dans l'exercice 1de l'annexe 1. En effet, l'unité choisie mesurant ici 10cm, elle risque d'apporter des confusions dans l'esprit des élèves qui connaitrait le millimètre comme *millième* partie du mètre. Le même travail sur la droite graduée et le papier millimétré pourrait être proposé dans cet exercice sans évoquer *le cm comme dixième partie de l'unité.* Les élèves pourraient être amenés à découvrir par eux-mêmes la fraction associée à la mesure de ce millimètre dans le partage de l'unité choisie. La recherche en serait bien plus intéressante.

3. Etude du Mémento

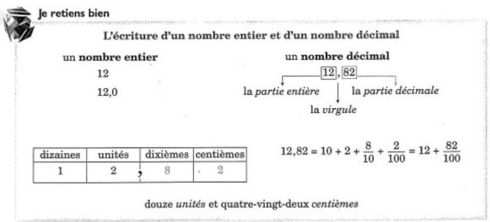
a. Quels sont les savoirs visés, que l'élève devrait avoir acquis à la fin de la progression ?

Précisons que les nouveaux savoirs visés dans cette progression ne seront certainement acquis qu'après entrainement, différenciation pour aide éventuelle, et réinvestissement :

- les nouveaux groupements liés au partage de l'unité en dixièmes, centièmes…
- le prolongement des règles d'échange 1unité = 10 dixièmes….
- les différentes écritures pour un même nombre : la décomposition canonique $u+\frac{d}{10}+\frac{c}{100}\dots$ et la correspondance avec le codage de l'écriture à virgule $\overline{u,dc}$ chaque chiffre représentant le chiffre *des unités, des dixièmes, des centièmes.*
- le repérage de points de la droite par des nombres entiers ou fractionnaires ou à virgule.
- le prolongement de la décomposition canonique d'un nombre (tableau de numération) *à droite* avec les nouveaux rangs *dixièmes*, *centièmes*, ….
- la valeur des chiffres dans l'écriture à virgule d'un nombre
- le rôle des zéros dans les écritures des nombres décimaux.
-

b. Le dernier mémento "JE RETIENS BIEN" (Annexe 3) vous parait-il satisfaisant ? Justifiez.

Le dernier mémento " *je retiens bien* " met en avant l'écriture du nombre entier avec une partie décimale nulle, et l'écriture du nombre décimal, avec sa partie entière, sa partie décimale et le codage de la virgule.


Je retiens bien

L'écriture d'un nombre entier et d'un nombre décimal

un **nombre entier**

12

12,0

un **nombre décimal**

$\boxed{12},\boxed{82}$

la *partie entière* — la *partie décimale*

la *virgule*

dizaines	unités	dixièmes	centièmes
1	2 ,	8	2

$12{,}82 = 10 + 2 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100} = 12 + \frac{82}{100}$

douze *unités* et quatre-vingt-deux *centièmes*

Il fait le lien avec le tableau de numération et avec la décomposition canonique du nombre sous la forme de somme de fractions décimales. La position des chiffres, leur rang et leur valeur sont donc mis en avant.

On peut regretter de ne pas avoir d'exemples montrant le lien avec le nombre de dixièmes ou de centièmes, comme par exemple : 128 centièmes = $\frac{100}{100}+\frac{28}{100}=1+\frac{2}{10}+\frac{8}{100}=1,28$

La position d'un nombre décimal encadré par deux entiers sur la droite graduée pourrait aussi faire partie du mémento, compte tenu de la place de cette approche tout au long de cette séquence.

Pour conclure

Au cours d'une séance de formation, un exercice a soulevé des remarques de la part d'une étudiante que nous vous proposons ici (NDLR : mes commentaires en bleu)…

Dans un manuel de CM2, la définition d'une fraction décimale paraît simple : c'est une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000.... L'exercice suivant est proposé : « Voici une liste de fractions $\frac{7}{12};\frac{4}{10};\frac{13}{250};\frac{12}{100};\frac{10}{20};\frac{13}{1000};\frac{56}{10};\frac{100}{300}$ **. Entourer les fractions décimales »**

L'étudiante fait la remarque suivante :

Avec la définition précédente, je ne me pose pas de question et j'entoure, sereine $\frac{4}{10};\frac{12}{100};\frac{13}{1000};\frac{56}{10}$

Je lui réponds que son premier réflexe est pertinent.

Puis elle poursuit : « *mais en faisant un autre exercice de la partie scientifique (ci-dessous), je comprends que le dénominateur visible peut cacher un 10, un 100 ou un 1000.*

« Voici une liste de nombres $\frac{1}{7}$; $\frac{27}{8}$; $\frac{91}{7}$; $\frac{42}{17}$ **. Quels sont ceux qui sont des décimaux ? »**

Et là, l'exercice de CM2 ne me paraît plus aussi évident ; et je ne comprends pas pourquoi il n'y aurait pas de "faux amis" dans cette série de fractions de CM2 ».

Cette deuxième phase est salutaire puisqu'elle amène à la réflexion !

L'étudiante poursuit : « *et donc je me demande pourquoi* $\frac{10}{20}$ *n'est pas entouré, puisque c'est aussi* $\frac{5}{10}$. *Et pourquoi pas* $\frac{100}{300}$ *?* »

Bon esprit critique : $\frac{10}{20}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=0,5$ est bien un décimal.

Elle observe perplexe $\frac{13}{250}$ et $\frac{7}{12}$ ne sachant plus quoi faire… Elle conclut alors: « *Et malgré ma révision des nombres premiers et du calcul des PGCD, je ne comprends pas non plus la correction de l'exercice scientifique. Et là je me trouve dans une situation très angoissante, face à des chiffres qui n'ont aucun sens pour moi !* »

Alors reprenons au début avec un petit rappel de cours, espérant ainsi redonner du sens à ce qui n'en n'a plus !

Un nombre décimal peut s'écrire sous forme d'une fraction décimale $\frac{N}{10^n}$. Il s'agit donc de voir si l'on peut transformer ces dénominateurs, pour obtenir une puissance de dix. Parallèlement, le numérateur sera ajusté.

Ainsi $\frac{27}{8}=\frac{3^3}{2^3}=\frac{27\times 5^3}{2^3\times 5^3}=\frac{3375}{1000}=3,375$. C'est donc bien un nombre décimal.

$\frac{91}{7}=\frac{7\times 13}{7}=13$, qui est un entier naturel, est donc lui aussi un nombre décimal (il peut s'écrire 13,0).

Les deux fractions $\frac{1}{7}$ *et* $\frac{42}{17}$ sont deux fractions irréductibles dont le dénominateur comporte des facteurs premiers autres que les facteurs 2 ou 5 cherchés. Ce ne sont donc pas des fractions décimales, donc pas des nombres décimaux.

Que pensez alors de la définition de ce manuel de CM2 ? : « Une fraction décimale est une fraction *dont le dénominateur est* 10, 100, 1000.... »

☞ **Attention, ne vous fiez pas aux apparences… Un dénominateur peut en cacher un autre !**

Ainsi $\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$. On ne pourra jamais transformer ce dénominateur 3 en puissance de 2 et/ou de 5… Ce n'est donc pas un nombre décimal. Il en est de même de $\frac{7}{12}$ puisque cette fraction est irréductible et le dénominateur 12 comporte un facteur 3. Remarquons qu'il en serait différemment avec $\frac{15}{12}=\frac{3\times 5}{3\times 4}=\frac{5}{2^2}=\frac{5\times 5^2}{2^2\times 5^2}=\frac{125}{100}=1{,}25$

De même, $\frac{13}{250}$ va pouvoir se transformer car $\frac{13}{250}=\frac{13\times 4}{250\times 4}=\frac{52}{1000}$. C'est le nombre décimal 0,052.

Pour mémoire, un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est le quotient de deux entiers *a et b*, *b* étant non nul. Son écriture est une fraction.

On remarque cependant que tout au long de cet apprentissage à l'école, les nombres fractionnaires ne sont pas définis comme quotient de deux entiers. Ainsi la fraction $\frac{3}{4}$ représente 3 fois $\frac{1}{4}$, un quart représentant la part obtenue en pliant l'unité en 4.

La notion de quotient amènerait à partager 3 unités en 4 parts, ce qui est plus difficile à concevoir pour les élèves puisque le nombre à diviser (3) est plus petit que le partage à réaliser (4). Cette notion de quotient et le lien avec les écritures fractionnaires introduira le nombre rationnel au collège, en lien avec la division. Les fractions prennent alors leur statut de nombre à part entière. Elles sont aussi présentées comme les solutions des équations de type $ax=b$.