D18C. Autour de l'ordre des Decimaux en Cycle 3

Ce fichier, corrigé du fichier **D18**, aborde une notion très nouvelle pour les élèves du Cycle 3, à savoir la notion de densité de l'ensemble des nombres décimaux. Jusqu'à présent les élèves n'avaient fréquenté que l'ensemble des nombres entiers naturels, dans lequel chaque nombre a un successeur. L'analyse des travaux d'élèves présentés vous montre les difficultés fréquemment rencontrées sur ce sujet. En deuxième partie une séquence d'apprentissage vous est proposée.

Les réponses apportées ne sont pas exhaustives. Elles dépassent cependant parfois celles attendues dans le cadre du concours, pouvant ainsi enrichir votre vue sur d'autres travaux proposés ou sur l'apprentissage en général.

I. Analyse de travaux d'élèves

A. Pourquoi ces erreurs…?

a. A la question : « *Donne le nombre entier qui suit immédiatement 23,5 puis donne le nombre décimal qui suit immédiatement 32,13* », Antonin répond : « 23,6 et 32,131 ». Léo lui répond : « 23 et 32,12 ». Qu'en pensez-vous ?

La réponse d'Antonin montre qu'il n'a pas compris la densité de l'ensemble des décimaux et qu'il pense que chaque nombre décimal a un successeur, tout comme chaque entier. Cependant pour 23,5, il applique la règle de l'ordre des entiers au rang des dixièmes (23,6 après 23,5), pour 32,13 il pense qu'il faut passer du rang des centièmes à celui des millièmes (32,13**1** après 32,13) pour obtenir le nombre suivant.

La réponse de Léo est fausse de deux points de vue. D'une part, il confond successeur et prédécesseur car pour les deux nombres, il donne un résultat qui précède le nombre donné. Par ailleurs pour le deuxième nombre 32,13, il fait la même erreur qu'Antonin sur le rang des dixièmes (32,12 après 32,13) ; pour le premier 23, il donne l'entier qui précède le nombre décimal 23,6.

b. A la question : « *Entre 12,7 et 12,9, y a-t-il un nombre décimal-aucun nombre décimal- plusieurs nombres décimaux ? Et entre 14,6 et 14,7 ?* », Antonin répond : « *'oui', un seul entre 12,7 et 12,9 puis 'non', aucun entre 14,6 et 14,7* ». Léo, lui, répond « *'oui', un seul entre 12,7 et 12,9 et oui un seul entre 14,6 et 14,7* ». Qu'en pensez-vous ?

Cette fois la question propose trois réponses mais ne demande pas de citer les nombres. Les deux réponses de ces élèves montrent que là encore, la densité de ce nouvel ensemble n'est pas intégrée puisque ni l'un ni l'autre ne pense qu'entre deux décimaux, il y a plusieurs décimaux à intercaler.

Antonin a certainement une vision du nombre décimal comme la juxtaposition de deux entiers. Il considère donc la partie décimale séparément et applique l'ordre des entiers : entre 7 et 9, il y a 8, alors qu'entre 6 et 7 il n'y a pas de possibilités.
Léo semble avoir une conception plus avancée et pense qu'on peut toujours trouver un nombre, peut-être le centre de l'intervalle, ici [12,7 ; 12,9], c'est-à-dire 12,8. Cependant pour l'intervalle [14,6 ; 14,7], on ne sait pas s'il saurait le proposer.

c. A la question : « *Calcule 13,56* $\times$ *10 et 1,356* $\times$ *100. Quel est le plus grand ?* ». Antonin trouve « *130,56 et 100,356 et répond que le plus grand est le premier* ». Léo, lui, trouve « *13,560 et 135,600 et répond que c'est le second* ». Qu'en pensez-vous ?

Tous les deux appliquent *la règle des zéros* des entiers pour multiplier par 10 et 100. Antonin l'applique à la partie entière, toujours en considérant que le nombre est formé de deux entiers juxtaposés, c'est pourquoi il trouve 130 et 100. Léo l'applique au nombre dans sa globalité sans tenir compte de la virgule et ajoute les zéros la fin.
Tous les deux ont une réponse cohérente avec leurs réponses pour la comparaison des deux résultats.

d. A la question : « *Compare* $96+\frac{2}{100}$ *et 96,2* », Antonin répond que « *le premier est plus grand car il est égal à 98,100* ». Léo, lui dit qu'*ils sont égaux*. Qu'en pensez-vous ?

L'un et l'autre donnent des réponses fausses. Ils ne maitrisent pas la valeur de chaque chiffre selon son rang dans l'écriture d'un nombre décimal. Antonin fait deux types d'erreurs : il ne prend pas en compte les rangs dans la décomposition en écriture fractionnaire quand il ajoute $(96+2=98)$. D'autre part il confond la notation fractionnaire ($\frac{...}{100}$) avec le codage de la virgule (..,100).

Léo confond les centièmes et les dixièmes. Il considère que $\frac{2}{100}$ s'écrit 0,2

e. A la question : « *Trouve une fraction égale à 80,4* » Antonin répond : « $\frac{80}{4}$ » et Léo, lui répond : « $\frac{8\cancel{0}4}{1\cancel{0}}$ ». Qu'en pensez-vous ?

Antonin fait le même type d'erreur que précédemment en associant les deux codages. Léo trouve la bonne écriture fractionnaire car $80,4=\frac{804}{10}$, mais ne donne pas de sens à la simplification de cette écriture. Il barre les zéros sans prendre en compte ce qu'ils représentent.

B. Un maître propose l'exercice suivant à sa classe de CM2

Range les nombres suivants du plus petit au plus grand : 2 2,02 22,2 22,02 20,02 0,22

.... < .... < .... < .... < .... < ....

Quelles sont les productions exactes ? Pour les autres, repérer avec précision les erreurs et analyser leur origine possible.

Une seule production est exacte, c'est celle de *l'élève C* : $0,22 < 2 < 2,02 < 20,02 < 22,02 < 22,2$

L'élève A répond $22,20 < 22,02 < 20,02 < 2,02 < 2 < 0,22$

Il a complété chaque partie décimale à deux chiffres, a rangé les nombres proposés dans un ordre correct. Par contre il n'a pas respecté la consigne *du plus petit au plus grand*, soit par mauvaise lecture, soit plus probablement par confusion des deux symboles < et >.

La réponse de *l'élève B* montre qu'il a rangé correctement les nombres comportant une virgule : $0,22 < 2,02 < 20,02 < 22,02 < 22,2$. Peut-être ne sait-il pas où placer le nombre entier 2 dans cette succession, ce qui peut expliquer qu'il le place en dernier. Une autre explication pourrait être que, le nombre décimal étant associé à un partage dans sa représentation, il considère peut-être que le nombre entier 2 est plus grand (*mais cela reste très hypothétique…)*

L'élève D répond $0,22 < 2 < 2,02 < 20,02 < 22,2 < 22,02$. Il fait une erreur sur les deux derniers nombres, les autres sont bien ordonnés. Il est probable qu'il ait classé ces deux nombres selon la longueur de la partie décimale, et pense comme pour les entiers, que le nombre est plus petit s'il comporte moins de chiffres. Ainsi $22,2 < 22,02$ car la partie décimale est plus courte.

L'élève E répond $2 < 0,22 < 2,02 < 22,2 < 20,02 < 22,02$

Il a rangé les nombres sans tenir compte de la virgule. Pour lui, ce codage n'a pas de sens dans le rangement ; sans virgule, les entiers obtenus sont bien rangés : $2 < 22 < 202 < 222 < 2002 < 2202$

II. Analyse de situations d'apprentissage[1]

Les documents[2] 1 et 2 présentent deux situations de départ concernant l'ordre sur les nombres décimaux.

Les documents[3] 3 et 4 présentent des méthodes pour comparer les nombres décimaux.

Documents 1 et 2

1. A quel niveau de classe peut-on présenter les activités de ces documents ?

Ces documents portent sur la comparaison et l'ordre des nombres décimaux. Les programmes 2008 énoncent : « *À la fin du CM2 les élèves doivent être capables d'écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux et quelques fractions simples* ».

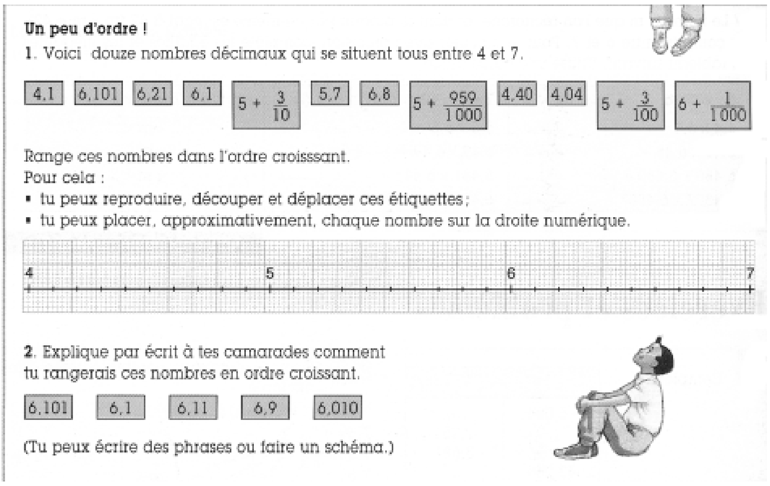
La progression suggérée précise les compétences suivantes :

Savoir repérer, placer sur la droite graduée, comparer, ranger, encadrer par deux entiers consécutifs, passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement, connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position jusqu'au 1/100ème en CM1, jusqu'au 1/10000ème au CM2. Ces activités se feront donc en cycle 3, plutôt en fin de CM1 et CM2 puisqu'elles comportent des millièmes.

[1] D'après Créteil 1999

[2] Doc 1 : extrait de "Le nouvel objectif calcul", HATIER, Doc 2 : extrait de "Vivre les mathématiques", ARMAND COLIN

[3] Doc 3 : extrait de "Diagonale", NATHAN ; Doc 4 : extrait de "Apprentissages mathématiques", NATHAN



Un peu d'ordre !

1. Voici douze nombres décimaux qui se situent tous entre 4 et 7.

4,1 | 6,101 | 6,21 | 6,1 | $5 + \frac{3}{10}$ | 5,7 | 6,8 | $5 + \frac{959}{1000}$ | 4,40 | 4,04 | $5 + \frac{3}{100}$ | $6 + \frac{1}{1000}$

Range ces nombres dans l'ordre croissant.
Pour cela :
- tu peux reproduire, découper et déplacer ces étiquettes ;
- tu peux placer, approximativement, chaque nombre sur la droite numérique.

2. Explique par écrit à tes camarades comment tu rangerais ces nombres en ordre croissant.

6,101 | 6,1 | 6,11 | 6,9 | 6,010

(Tu peux écrire des phrases ou faire un schéma.)

2. Expliquez où et comment les seules règles de comparaison sur les nombres entiers peuvent suffire.

L'activité consiste à repérer la meilleure performance pour chaque enfant, puis à classer les enfants. Les règles de comparaison sur les nombres entiers énoncent : « *Pour comparer deux nombres entiers, on regarde d'abord la longueur du nombre, c'est-à-dire son nombre de chiffres. Plus un nombre entier a de chiffres, plus il est grand. Si deux nombres entiers ont le même nombre de chiffres, on compare les chiffres de même rang* ».

	GUILLAUME	JOHAN	ALBAN	BERTRAND
1er essai	2,80m	2,75m	2,35m	3,14m
2ème essai	3,21m	3,08m	1,95m	3,25m
3ème essai	2,05m	3,22m	2,50m	3,42m
4ème essai	3,19m	3m	2,58m	2,79m

Dans le document 2, toutes les mesures (sauf $3m$) comportent le même nombre de chiffres (un à la partie entière, deux à la partie décimale). Un élève peut donc transformer toutes ces mesures en centimètres et faire sa comparaison avec la règle de comparaison des entiers. Il trouvera ainsi pour le classement final :

258 < 321 < 322 < 342.

Une autre procédure pourrait consister à repérer, par exemple pour Guillaume, les mesures commençant par 3, puisque c'est la plus grande partie entière, puis choisir 3,21 comme étant le plus grand car 21 >19. L'élève considère alors le décimal comme la juxtaposition de deux entiers, les parties décimales ayant ici toutes deux chiffres. *Nous préférons rappeler ici que cette procédure devient fausse si le nombre de chiffres de la partie décimale n'est pas le même* !

3. Quelles sont les variables susceptibles d'avoir un effet sur les réussites et procédures des élèves ?

- La diversité des écritures, décomposition fractionnaire ou écriture à virgule : elle oblige l'élève à donner du sens à chaque chiffre selon son rang dans les différentes écritures. L'activité peut sembler plus complexe mais elle permet des procédures plus variées.
- La longueur des parties décimales dans les nombres à virgule : si l'on donne à comparer 3,21 et 3,42 comme dans l'exemple précédent, la réussite sera certainement plus grande que si l'on donne 3,8 et 3,79, mais la réponse (non explicitée par l'élève) ne permettra pas à l'enseignant d'évaluer la comparaison sur

des décimaux. En effet dans le second exemple, l'élève aura à donner du sens à la valeur des parties décimales pour pouvoir conclure.

- La présence du chiffre 0 à des rangs différents dans le nombre : il peut engendrer des erreurs dues à des confusions d'interprétation par exemple 1,2 et 1,02 ou 0,6 et 0,060….
- Les outils à disposition comme la droite numérique graduée qui peut aider à la représentation de l'ordre.
- Les unités de mesure qui peuvent donner un sens concret au nombre (monnaie, longueur…) et faciliter la comparaison.

4. Lequel de ces documents vous paraît le mieux adapté pour une situation de départ concernant la comparaison des nombres décimaux ? Justifiez votre réponse.

Le document 2 part d'une situation concrète et peut donner du sens à la nécessité de la comparaison. En activité de découverte, il serait intéressant de faire vivre cette activité à la classe dans la réalité d'une séance de sport. On a cependant vu ses limites dans la mise en place des règles de comparaison des décimaux (question 2) ; un prolongement sera donc nécessaire.

Le document 1 paraît mieux adapté pour ce prolongement pour construire la notion d'ordre sur l'ensemble des nombres décimaux et mettre en place des règles en quittant celles déjà connues des nombres entiers. La diversité des écritures est aussi un élément intéressant pour travailler sur ces nombres nouveaux. La présence de la droite graduée aide à la représentation de l'intercalation dans cet ensemble.

Documents 3 et 4

5. Faire une analyse critique de ces documents.

Ces documents proposent les règles de comparaison de décimaux.

Le document 3 explicite deux méthodes. La première méthode incite à comparer les chiffres rang par rang. L'exemple proposé est pertinent car les parties décimales sont de longueurs différentes ; un exemple avec des parties entières différentes aurait pu aussi être donné.

Je retiens bien — **Pour comparer deux nombres décimaux**

7,25 et 7,3

1ère méthode : on compare les parties entières ici 7 = 7
lorsqu'elles sont égales, on compare les parties décimales chiffre après chiffre :

7, 2 5
7, 3

3 est le plus grand : 7,3 > 7,25

2e méthode : on met les deux nombres au même format,

7 , 2 5
7 , 3 0

et on compare les chiffres de ces nombres à partir de la gauche : 7,30 > 7,25

La deuxième méthode avec l'écriture au même format ne conduit en général pas l'élève à comparer les chiffres à partir de la gauche, dans le sens de la lecture, comme cela est exprimé dans la règle. Cette procédure tend à présenter le décimal comme un entier particulier codé. Ainsi $7{,}30 > 7{,}25$ car $730 > 725$. Souvent l'écriture au même format revient à comparer les parties décimales directement $7{,}30 > 7{,}25$ car $30 > 25$… et l'on retombe alors dans la juxtaposition de deux entiers !

Pour le document 4, la méthode explicitée sollicite une comparaison des chiffres rang par rang, alors que les exemples proposés n'obligent pas les élèves à concevoir le décimal autrement que comme deux entiers accolés. Ainsi un élève peut conclure que $15,62 > 15,36$ seulement parce que $62 > 36$. Il aurait été plus judicieux et plus efficace en terme d'apprentissage, de choisir un exemple du type 15,62 et 16,354.

J'OBSERVE	POUR COMPARER LES NOMBRES DECIMAUX...	
	13,25 et 16,38	Je compare les *parties entières* si elles sont différentes: 13 < 16 donc 13,25 < 16,38
	15,62 et 15,36	Ou je compare les chiffres des *dixièmes* : 6 > 3 donc15,62> 15,36
	22,471 et 22,483	Ou je compare les chiffres des *centièmes* : 7 < 8 donc 22,471 < 22,483 Etc..
JE RETIENS	Pour comparer des nombres décimaux, on compare les parties entières. Si celles-ci sont identiques, on compare les chiffres des dixièmes. Si ceux-ci sont aussi les mêmes, on compare les chiffres des centièmes, puis éventuellement ceux des millièmes.	

6. Quelle règle de comparaison proposeriez-vous à vos élèves ?

La règle du *document 4* a l'avantage de donner du sens au rang de chaque chiffre dans l'écriture à virgule. Les exemples seront choisis pour contrer les représentations trop spontanées qui pourraient induire une ambigüité du raisonnement, au-delà de la conclusion énoncée. Il peut être intéressant de rappeler, en aide, que les parties décimales peuvent être comparées dans leur globalité à certaines conditions. Certains élèves préfèrent cette méthode, l'important est toujours de revenir au sens.

Ainsi :

Pour comparer deux nombres décimaux

☞ Je compare les parties entières. Le plus grand est celui qui a la plus grande partie entière.

Par exemple $17,659 < 21,3$ car 17 < 21.

17,659 comprend 17 unités et 659 millièmes

21,3 comprend 21 unités et 3 dixièmes

☞ Si les parties entières sont identiques, je compare les chiffres de la partie décimale rang par rang. Le plus grand nombre est celui qui a le plus grand chiffre des dixièmes.

Ainsi $23,45 < 23,8$ car 4 < 8.

23,45 comprend 23 unités 4 dixièmes et 5 centièmes

23,8 comprend 23 unités 8 dixièmes.

Si les chiffres des dixièmes sont les mêmes, je compare les chiffres des centièmes, puis éventuellement ceux des millièmes. Ainsi $12,465 > 12,4631$ car 5 > 3 au rang des millièmes.

☞ Aide : Après avoir comparé les parties entières, je peux aussi comparer les parties décimales MAIS il faut qu'elles comportent le même nombre de chiffres.

Ainsi $8,154 < 8,16$ car $8,154 < 8,160$

8,154 comprend 8 unités et 154 millièmes

8,16 comprend 8 unités et 160 millièmes

7. On considère l'exercice suivant :

Trouver un nombre compris entre	**8,4 et 8,7**	**10,1 et 10,2**	**25 et 25,1**	**7 et 7,01**

Quelle propriété de l'ensemble des nombres décimaux ce type d'exercice permet-il de travailler ?

Expliquer quelle incidence a le choix des valeurs numériques dans ce type d'exercice.

Il s'agit ici de trouver un nombre compris entre deux nombres donnés. L'intercalation de nombres entre deux nombres décimaux donnés fait référence à la densité de cet ensemble de nombres. Selon les valeurs numériques proposées, l'intercalation est plus ou moins visible. Ainsi entre 8,4 et 8,7, l'élève peut spontanément concevoir les deux nombres 8,5 et 8,6. Plus difficile entre 8,1 et 8,2 il lui faudra zoomer au rang des centièmes. Il serait d'ailleurs intéressant de voir quelle représentation l'élève a de ce zoom, juste centré sur le milieu ou avec une diversité de réponses possibles. Pour 25 et 25,1, il lui faut déjà concevoir le rang des dixièmes qui n'apparaît pas dans l'écriture de 25 (25,0) pour ensuite zoomer au centième avec le même type de possibilités que précédemment. Enfin pour 7 et 7,01 il faut concevoir le rang des millièmes 7,000 et 7,010 pour se représenter effectivement l'intercalation.

Pour conclure

Les difficultés persistantes au collège

- La prise en compte de la position des chiffres après la virgule
- La multiplication d'un décimal par 10, 100, 1000 parfois visualisée comme portant seulement sur la partie entière $2,7\times100=200,7$ ou sur la partie décimale $2,7\times100=2,700$.
- Le lien entre décimaux et fractions décimales avec l'égalité $\frac{9}{10}=0,9$ transféré à tort aux fractions non décimales. On trouve ainsi des erreurs du type $\frac{9}{2}=9,2$
- Dans la division, le statut du reste pose problème par rapport à son rang. Ainsi $47=9\times5+2$, mais $4,7$est-il égal à $9\times0,5+2$?
- Les difficultés dans le repérage de graduation, les encadrements, l'intercalation.
- Le rôle de la virgule et la représentation longtemps persistante du nombre décimal comme juxtaposition de deux nombres entiers qui peut entrainer des erreurs dans les comparaisons ou les opérations.

En fin de collège, les élèves ont encore du mal à dissocier la nature des nombres et leurs différentes écritures. Spontanément le nombre décimal est associé à une écriture à virgule, la fraction décimale associée à une fraction. L'inclusion des ensembles N des entiers naturels, D des décimaux, Q des rationnels, R des réels (même si ces noms d'ensembles ne sont pas nommés ainsi) prend très lentement sa place dans les représentations des élèves.

Il faudra pour beaucoup attendre le lycée pour que cette acquisition soit fiable. On notera encore (et cela même dans la préparation au concours) la difficulté à dissocier les valeurs exactes et les valeurs approchées de certains nombres.

Pour mémoire $\frac{17}{2}=8,5$, $\frac{17}{5}=\frac{34}{10}=3,4$, mais $\frac{17}{3}\neq 5,7$ ni $5,6<\frac{17}{3}<5,7$. Le nombre $\frac{17}{3}$ est un rationnel qui n'a qu'une façon de se présenter, à moins de préférer un encadrement $5,6<\frac{17}{3}<5,7$!