

D20C. Autour de la Symétrie Axiale

Ce fichier, corrigé du fichier **D20**, aborde l'apprentissage de la symétrie axiale. Celle-ci fait partie des **isométries**, transformation qui conserve les longueurs et les angles et dans laquelle la figure obtenue est superposable à la figure initiale... à un retournement près. Nous vous proposons ici l'analyse de travaux d'élèves sur papier quadrillé, puis une séquence d'apprentissage en cycle 3.

Les réponses apportées ne sont pas exhaustives. Elles dépassent cependant parfois celles attendues dans le cadre du concours, pouvant ainsi enrichir votre vue sur d'autres travaux proposés ou sur l'apprentissage en général.

Analyse de travaux d'élèves¹

On a demandé à des élèves de cycle 2, dans le cadre d'une évaluation diagnostique, de compléter ces deux figures avec la consigne suivante : « Complète ces deux dessins comme si tu pliais à chaque fois la feuille en suivant les grands traits. ».

1. L'objectif de l'enseignant est de faire émerger les erreurs pour y remédier. Citez les caractéristiques (communes et distinctes) de ces deux dessins que le maître a retenues à cet effet.

Caractéristiques communes

Le **quadrillage** permet de faire le tracé de la figure symétrique point par point, en comptant les carreaux, sur une même ligne sans se soucier de l'orthogonalité : on prend juste en compte **l'égalité des distances par rapport à l'axe**.

- Le quadrillage est inclus sur un fond blanc. Ce n'est pas une feuille globalement quadrillée.
- Chaque figure est une figure complexe, composée de **segments rejoignant sur les nœuds du quadrillage**

¹ Grenoble 2002
Parimaths.com

- L'axe suit une ligne du quadrillage
- L'axe n'est pas l'axe de symétrie de la partie quadrillée, on évite ainsi le comptage des carreaux à partir des bords.
- La figure ne coupe pas l'axe de symétrie.
- La figure n'a elle-même pas d'axe de symétrie parallèle à l'axe donné ce qui impose la prise en compte du **retournement** dans le tracé de la figure symétrique.

Caractéristiques différentes

- Le positionnement de la figure par rapport à l'axe n'est pas le même dans les deux cas :

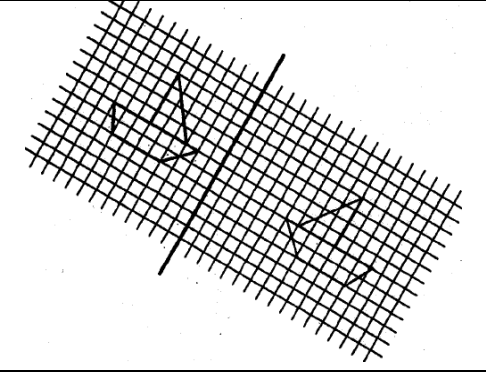
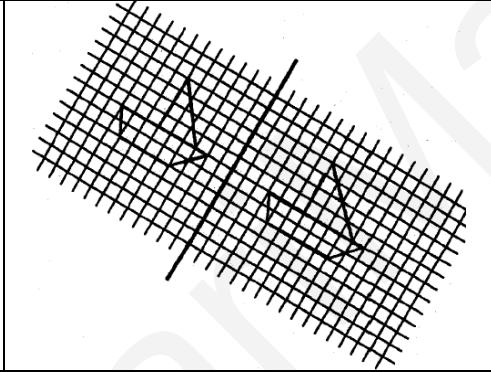
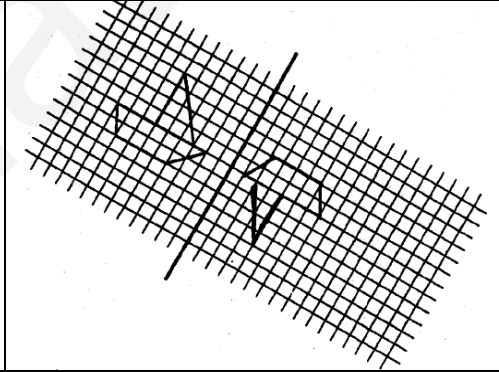
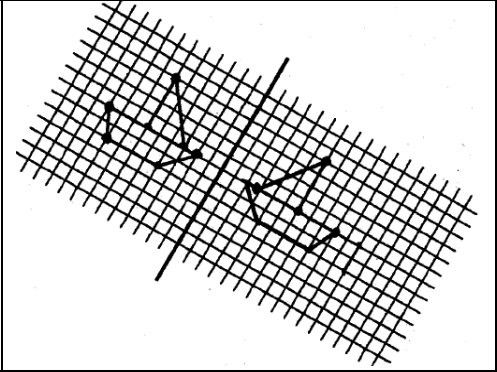
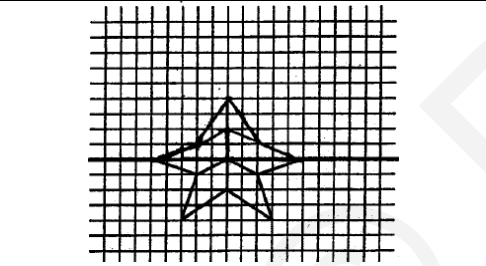
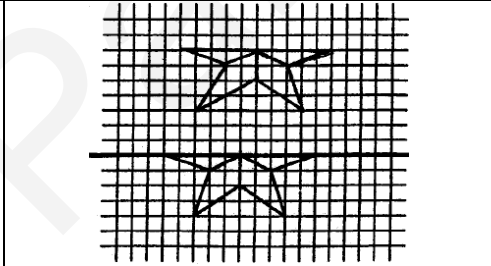
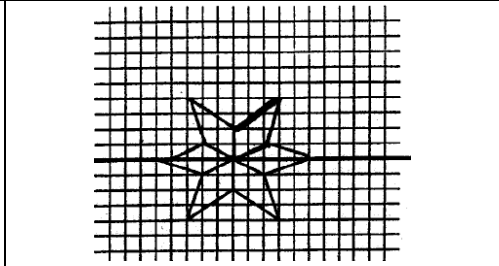
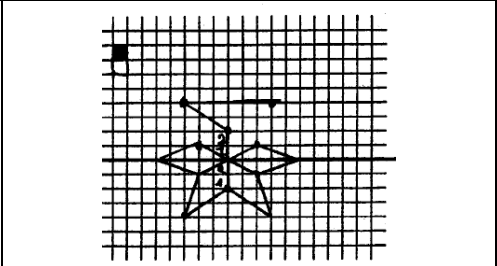
Dans le bateau l'axe ne touche pas la figure, on cherche à **tracer la figure symétrique par rapport à l'axe**.

Dans l'étoile, l'axe touche la figure ; on cherche plutôt à dessiner l'autre partie de l'étoile c'est-à-dire à **compléter la figure par symétrie**.

- Le positionnement du quadrillage n'est pas le même dans les deux cas :

Dans le bateau, le **quadrillage n'est pas parallèle au bord de la feuille**, l'axe est oblique par rapport à ces bords mais pas par rapport au quadrillage.

Dans l'étoile, la position du quadrillage et celle de l'axe sont plus standards et évoquent **le reflet par rapport à un axe horizontal**.

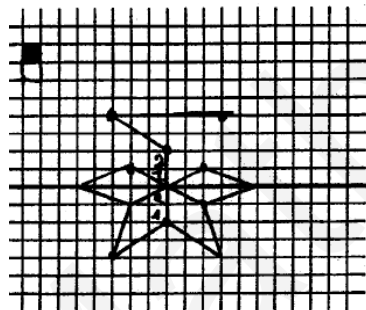
Elève A	Elève B	Elève C	Elève D
			
			

2. Citez au moins deux transformations, autre que la symétrie axiale, que les élèves ont utilisées implicitement et approximativement, en précisant les élèves concernés.

L'élève B utilise la **translation**, évoquée souvent par un glissement. L'élève C effectue une **symétrie centrale** (visible sur le bateau). L'élève A réalise une symétrie axiale composée d'une translation (bateau).

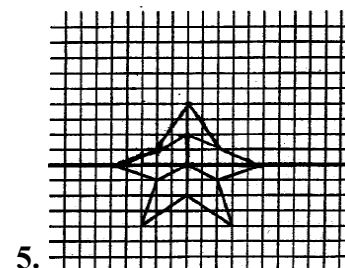
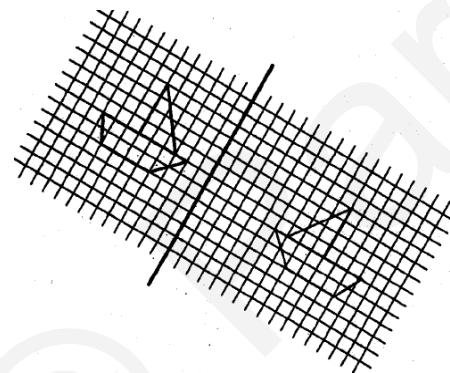
3. Quelles sont les deux particularités qui apparaissent sur les dessins de l'élève D. Utilisez ces indices pour reconstituer la démarche de cet élève.

L'élève D a repéré les points sur les nœuds et a numéroté le comptage des carreaux ; il semble donc que cet élève n'ait pas pris en compte la forme globale de la figure pour son tracé, mais a construit le symétrique de chaque point en s'assurant de l'équidistance par rapport à l'axe. Il a ensuite tracé les segments.



4. Dans le premier dessin, quelle(s) propriété(s) de la symétrie axiale l'élève A a-t-il respectée(s) ?

Dans la construction de l'élève A, l'**image d'un segment est un segment de même longueur**, **les angles sont conservés**. Les segments perpendiculaires à l'axe restent perpendiculaires dans la symétrie. **La figure est globalement conservée et retournée**.



5. Analyser les erreurs de l'élève A dans chaque production. Emettre une hypothèse sur l'origine de ces erreurs.

Pour le bateau, l'élève ne prend pas en compte la distance à l'axe. Il semble avoir compté les carreaux à partir du bord du quadrillage (3 carreaux), sans tenir compte de l'axe. Par ailleurs, il décale la figure d'un carreau vers le bas, mauvais comptage ou centrage du dessin dans l'espace disponible, dans le pliage virtuel évoqué dans la consigne... Il prend bien en compte la forme de la figure, mais pas son placement par rapport à l'axe.

Pour l'étoile, les deux pointes droite et gauche sont bien complétées. Par contre la partie centrale est reproduite par glissement. Un report des carreaux a été fait, le retournement n'a pas été pris en compte. L'axe horizontal évoque le reflet dans la symétrie, mais ici il faut reproduire la partie supérieure du dessin. L'élève semble avoir complété la partie *vide* du dessin, sans doute dans l'évocation du pliage suggéré par la consigne.

Analyse d'une séquence d'apprentissage²

1. Quelles propriétés de la symétrie axiale sont utilisées implicitement dans ces documents ?

Les principales propriétés de la symétrie axiale sont celles de l'isométrie : la conservation des longueurs et des angles font que la figure symétrique soit de mêmes dimensions et de même forme que celles de la figure donnée (figures superposables, documents A et B). Il y a retournement de la figure dans la transformation (document B). La distance à l'axe des deux figures (des points symétriques) est égale, mesurée orthogonalement (implicitement document A, explicitement document B «je retiens »).

2. Quelles sont les compétences exigibles en fin de cycle 3 ?

Au cycle 3, les connaissances dans le domaine de la symétrie se formalisent à travers trois compétences :

- Reconnaître qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie par pliage ou à l'aide d'un papier calque.
- Tracer sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée
- Compléter une figure par symétrie axiale.

Au cycle 3, les élèves vont explorer et expérimenter sur cette transformation, afin de faire émerger quelques unes de ses propriétés. *Les activités conduites peuvent prendre appui sur l'analyse ou la réalisation d'assemblages, de frises, de pavages, de puzzles, en utilisant différentes techniques : pliage, calque, miroir, gabarits.*

Ces activités sont l'occasion de mettre en évidence des phénomènes de déplacement, avec ou sans retournement, et ainsi rencontrer d'autres transformations.

L'utilisation de l'ordinateur (logiciels de dessin, géométrie dynamique) peut permettre d'enrichir la démarche expérimentale des élèves.

² Rouen 2003 annexes 5 et 6 « Objectif calcul CE2 » / annexes 7 et 8 « Diagonale CE2 »
Parimaths.com

Des activités de **tracé à main levée** de figures symétriques d'une figure donnée peuvent être proposées.

Sur papier quadrillé, on se limite à l'utilisation d'axes de symétrie qui suivent les lignes du quadrillage ou qui sont des diagonales de ce quadrillage. Les élèves sont confrontés à quelques cas où l'axe de symétrie coupe la figure.

3. Partie découverte

Énoncer les différentes étapes de l'activité proposée. Quelles sont les principales difficultés qu'un élève peut rencontrer ?

- Perception des éléments de symétrie axiale sur la carte ; **l'image mentale du pliage** est évoquée, mais le support ne semble pas permettre de le réaliser. La principale difficulté réside dans le fait que la manipulation ne soit pas possible. La complexité des figures peut aussi rendre la perception difficile.
- Pliage d'un carré en huit parties (trois fois). Découpage puis tracé d'une figure. Découpage. Mise en évidence des « axes de symétrie ». Plusieurs difficultés sont possibles dans la précision du pliage, en particulier en huit, dans la précision du découpage de la figure, dans son tracé, dans le découpage. La position du tracé sur la carte pliée peut aussi amener à un découpage incorrect qui ne permette pas de reconstituer la carte quand on déplie, et qui impose de tout recommencer.
- Reconstituer mentalement le pliage pour déterminer la figure initiale à découper. Cette recherche est particulièrement difficile car elle suppose d'avoir déjà repéré les axes de la figure. Le tracé des éléments à découper peut aussi représenter une difficulté pour les élèves car ils sont nombreux (4).

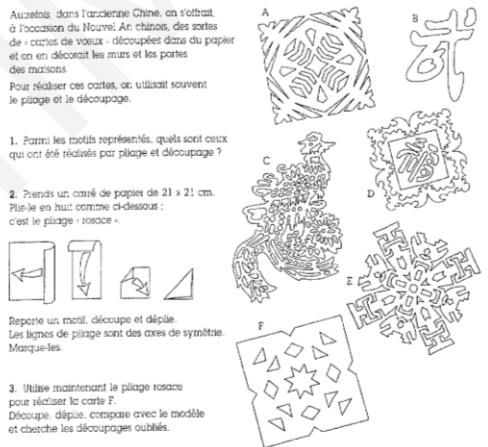
Pliages et symétrie
Construire par pliage des figures ayant un ou plusieurs axes de symétrie.

Découverte

Aurefois, dans l'ancienne Chine, on s'offrait, à l'occasion du Nouvel An chinois, des sortes de « cartes de vœux » découpées dans du papier et on en décorait les murs et les portes des maisons.
Pour réaliser ces cartes, on utilisait souvent le pliage et le découpage.

1. Parmi les motifs représentés, quels sont ceux qui ont été réalisés par pliage et découpage ?

2. Fais un carré de papier de 21 x 21 cm. Plie-le en huit comme ci-dessous : c'est le pliage « rosace ».



Reparte un motif, découpe et déplie.
Les lignes de pliage sont des axes de symétrie. Marque-les.

3. Utilise maintenant le pliage rosace pour réaliser la carte F.
Découpe, aligne, compare avec le modèle et cherche les découpages oubliés.

Le document contient six motifs (A-F) et des schémas de pliage. Les motifs A, B, C, D, E sont des formes complexes obtenues par pliage et découpage. Le motif F est une forme simple obtenue par pliage et découpage.

4. Document B (annexe 7)

Le document B introduit le tracé de la figure F' symétrique d'une figure F donnée, par rapport à une droite, sur papier quadrillé.

Énoncer les différentes étapes de la démarche proposée dans cette activité. Déterminer la cohérence globale de la progression de cette annexe, eu égard aux propriétés énoncées au 1.

Étapes *a* et *b* : tracé de la figure F , de l'axe (droite), mise en place du calque, décalquage de la figure F (il peut être utile de décalquer l'axe au cas où le calque bougerait).

Étapes *c* et *d* : **retournement du calque** et tracé de la nouvelle figure F' . Observation et définition. Validation par pliage et superposition des deux figures F et F' .

Exercice : l'exercice amène à laisser l'élève seul réinvestir ce qu'il vient de réaliser avec le calque, mais la consigne n'est pas explicite.

Les propriétés des « figures isométriques » et du « retournement » évoquées au 1, sont mis en avant avec l'utilisation du calque. L'équidistance à l'axe n'apparaît pas explicitement. On peut remarquer d'ailleurs que la position de l'axe sur le quadrillage dans l'exercice ne va pas permettre de repérer une erreur fréquente qui consiste à placer la figure par rapport au bord du quadrillage plutôt que par rapport à l'axe, pour un élève qui n'utiliserait pas le calque. Un prolongement de l'observation des figures obtenues sur ce quadrillage est à mener par l'enseignant pour le repérage des points sur les nœuds et l'équidistance par rapport à l'axe.

5 Utiliser la symétrie
Avec les nombres...
Réciter des produits de la table de multiplication...

Activité
Matériel : feuille quadrillée, papier-calque, crayon à papier, règle, adhésif.

a Trace une droite en rouge pour partager en deux parties une feuille quadrillée. Sur la partie gauche, reproduis ce polygone :

b Avec de l'adhésif, fixe un morceau de calque sur la partie gauche de ta feuille. Calque le polygone.

c Retourne le calque en le pliant le long de la droite rouge. Repasse sur les tracés du polygone.

d Retire le calque et observe les deux polygones. Ils sont **symétriques** par rapport à la droite rouge.

Tu peux le vérifier en pliant la feuille le long de la droite rouge.

1 Exercices
En te servant du quadrillage, trace la figure symétrique par rapport à la droite rouge.

5. A partir des ces deux extraits de manuels, décrivez les grandes étapes d'une progression que vous pourriez proposer aux élèves pour découvrir cette notion. Une progression possible pour les CE2

- Phase de diagnostique et de découverte : pliage, découpage, papier calque

Percevoir des axes de symétrie dans une figure simple

Percevoir la symétrie comme une isométrie : figures identiques, superposables

- Phase d'expérimentation (recherche) par décalquage et retournement sur papier quadrillé

Tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.

- Phase de structuration : Mise en évidence de la propriété d'équidistance par rapport à l'axe

Recherche sur papier quadrillé (axe sur une des lignes du quadrillage) de la figure symétrique d'une figure donnée.

Mise en commun des procédures, analyse des erreurs. Énoncé des nouvelles connaissances

- Phase d'entraînement sur les tracés en variant les variables didactiques, différenciation éventuelle.
- Phase de réinvestissement : compléter une figure simple par symétrie axiale(CM1).

6. Citez une difficulté spécifique à l'exercice 4 du document B.

L'exercice 4 du document B est le seul exercice sur papier blanc. Les élèves ont à décalquer la figure, à tracer un axe de symétrie puis à le valider en pliant la figure. La recherche de l'axe sur papier blanc peut être rendu difficile par l'orientation de la figure, cet axe n'étant pas parallèle au bord de la feuille (ni horizontal : effet *reflet*, ni vertical : effet *miroir*). Cependant une fois la figure décalquée, le calque peut être tourné et mis dans une position plus facilement interprétable par l'élève.

Pour conclure

Compléments sur l'apprentissage

Les différentes procédures utilisées pour réaliser une symétrie axiale au niveau de l'école sont très diverses. Les principales sont :

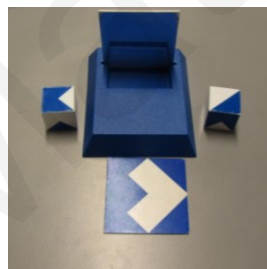
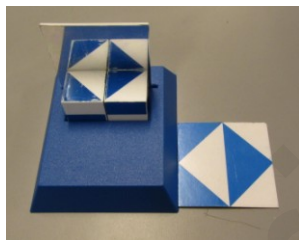
- A main levée, avec contrôle par pliage.
- Utilisation du papier calque et retournement
- Comptage des carreaux sur papier quadrillé (l'axe suit une ligne, les points sont sur les nœuds)

- Repérage des points caractérisant la figure sur les nœuds du quadrillage
- Tracé points par points (sommets de la figure) puis tracé des segments joignant les points
- Tracé d'un point symétrique d'un point, puis reproduction de la figure par cheminement le long des lignes du quadrillage
- Papier blanc : avec règle et équerre (hors programme cycle 3)
- Logiciel de géométrie dynamique (sur Cabri géomètre, validation possible par le menu « symétrie »)

Les principales variables didactiques, c'est-à-dire celles qui, pour une même consigne donnée, vont influencer sur la procédure de l'élève, peuvent se catégoriser en deux groupes : les outils à disposition, les caractéristiques de la figure.

Parmi les outils à disposition

- Pliage autorisé ou non
- Calque disponible ou non
- Miroir disponible³



- Papier quadrillé, papier pointé (nœuds), papier blanc.

Parmi les caractéristiques de la figure

- La direction de l'axe de symétrie, parallèle ou non au bord de la feuille
- La place de l'axe dans le quadrillage, dans le cadre du support
- L'espace disponible pour la réponse
- La familiarité de la figure

³ Jeu de miroir, matériel accessible dès le cycle 2 (NDLR : référence à préciser) remportant beaucoup de succès !
Parimaths.com

- La complexité de la figure, déterminée par des points situés sur les nœuds
- Les figures géométriques de base et leur position prototypique
- La position de la figure par rapport à l'axe, le touchant, le coupant (ou non).
- Le nombre d'axes de symétrie de la figure elle-même.

Les principales erreurs et difficultés rencontrées :

- Difficulté à mobiliser les images mentales de pliage (passage en 3D) dans la construction du symétrique d'une figure
L'élève fait glisser sa figure au lieu de la retourner par rapport à l'axe
L'élève pratique un retournement faux (induit par l'utilisation du calque non scotché sur l'axe)
- Surcharge cognitive par rapport aux images mentales mobilisées... *la fumée sortant de la cheminée d'une maison s'envolera souvent dans la mauvaise direction, même si la maison elle-même a bien été transformée (translation)*
- Prédominance d'une ligne « de rappel » horizontale lorsque l'axe est oblique (translation)
- Théorèmes en acte : « Un axe de symétrie passe par le milieu de la figure (la lettre M a un axe de symétrie vertical, d'où la lettre N aussi !) »... « L'image d'un segment est un segment de même longueur (vrai), d'où « l'image d'un segment est un segment de même direction » (théorème en acte faux !)
- Positionnement « standard » de l'axe de symétrie horizontal ou vertical qui induit des images mentales erronées quand l'axe devient oblique (le positionnement du quadrillage « en biais » sur la feuille peut-être intéressant de ce point de vue).
- La place de la figure par rapport à l'axe : « La symétrie orthogonale est une transformation d'un demi-plan dans un autre demi-plan »
- « Savoir tracer le symétrique d'un point » ne veut pas dire « Savoir tracer le symétrique d'une figure »
Dans le tracé point par point, difficulté à joindre les points dans l'ordre correct.
Dans le tracé de la figure symétrique, l'utilisation du déplacement sur quadrillage à partir d'un point peut amener à des confusions spatiales dans l'effet 'miroir' (haut/bas, droite/gauche).
- « Savoir trouver l'axe de symétrie d'une figure complexe » est une autre compétence que celle de « savoir trouver l'axe de deux figures associées par symétrie ».

Annexe 5 (document A)

49

Pliages et symétrie

Construire par pliage des figures ayant un ou plusieurs axes de symétrie.

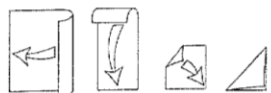
Découverte

Autrefois dans l'ancienne Chine, on s'offrait, à l'occasion du Nouvel An chinois, des sortes de « cartes de vœux » découpées dans du papier et on en décorait les murs et les portes des maisons.

Pour réaliser ces cartes, on utilisait souvent le pliage et le découpage.

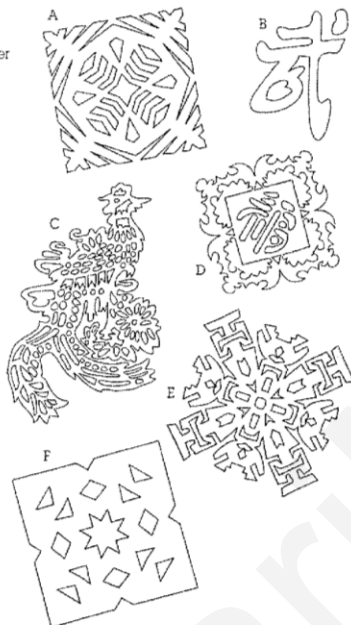
1. Parmi les motifs représentés, quels sont ceux qui ont été réalisés par pliage et découpage ?

2. Prends un carré de papier de 21 x 21 cm. Plie-le en huit comme ci-dessous : c'est le pliage « rosace ».



Reporte un motif, découpe et déplie. Les lignes de pliage sont des axes de symétrie. Marque-les.

3. Utilise maintenant le pliage rosace pour réaliser la carte F. Découpe, déplie, compare avec le modèle et cherche les découpages oubliés.



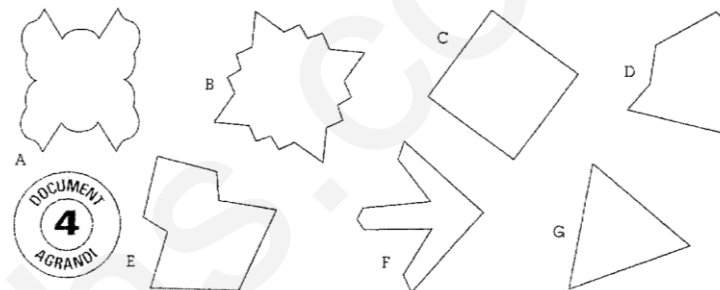
AIDE-MÉMOIRE N° 2 - PAGE 183

Exercices et problèmes

1 En pliant une feuille de papier une seule fois, trace puis découpe une forme qui, une fois dépliée, te donnera un carré. Avec une autre feuille, procède de la même manière pour obtenir un triangle. Avec une troisième feuille, fais de même pour obtenir un rectangle.

Annexe 6 (suite du document A)

2 Découpe les figures agrandies page 190. Trace sur le calque l'axe ou les axes de symétrie de ces figures, s'ils existent. Puis vérifie par pliage.



3 Le pélican de Jonathan.

« Le pélican de Jonathan.
Au matin, pond un œuf tout blanc.
Et il en sort un pélican
lui ressemblant étonnamment... »
(R. Desnos)

a/ Observe le pliage et le découpage réalisés par Bertrand.

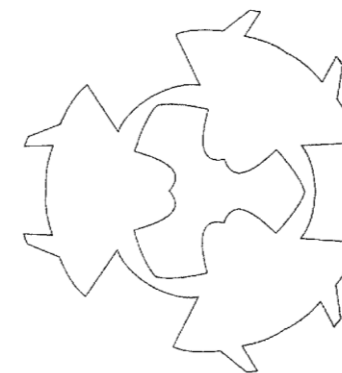


À ton tour, essaie d'obtenir un découpage identique en décalquant le modèle page 191.

b/ Laurent a fait un pliage en accordéon. Il a obtenu une ribambelle de pélicans. À ton tour, essaie de réaliser une ribambelle de pélicans.



4 Plie en six un disque de papier. Utilise-le pour obtenir un découpage qui ressemble à celui-ci.



Annexe 7 (document B)



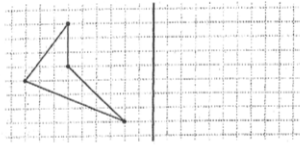
Utiliser la symétrie

Avec les nombres.
Réciter des produits de la table de multiplication.

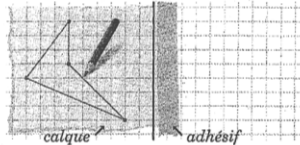
Activité

Matériel : feuille quadrillée, papier-calque, crayon à papier, règle, adhésif.

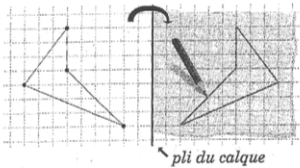
a Trace une droite en rouge pour partager en deux parties une feuille quadrillée. Sur la partie gauche, reproduis ce polygone :



b Avec de l'adhésif, fixe un morceau de calque sur la partie gauche de ta feuille. Calque le polygone.

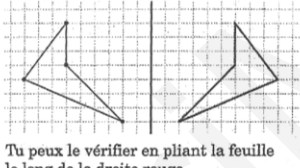


c Retourne le calque en le pliant le long de la droite rouge. Repasse sur les tracés du polygone.



pli du calque

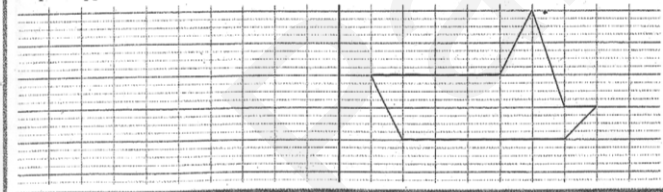
d Retire le calque et observe les deux polygones. Ils sont **symétriques** par rapport à la droite rouge.



Tu peux le vérifier en pliant la feuille le long de la droite rouge.

Exercices

En te servant du quadrillage, trace la figure symétrique par rapport à la droite rouge.

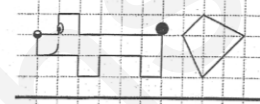


Annexe 8 (suite du document B)

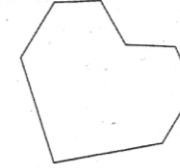
- 2**
- Recherche les lettres de ce prénom qui ont un axe de symétrie.
 - Reproduis chacune de ces lettres sur un quadrillage. Trace en rouge les axes de symétrie.



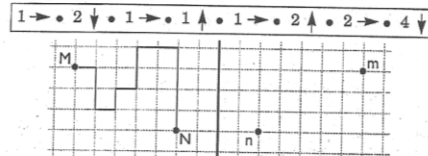
- 3**
- Trace les deux figures symétriques par rapport à la droite bleue.



- 4**
- Reproduis cette figure sur un calque. Cherche l'axe de symétrie et vérifie en pliant.

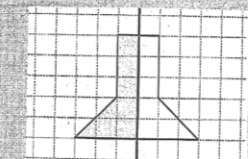
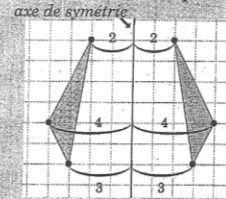


- 5**
- Reproduis le chemin rouge. Trace et code le chemin symétrique qui va de m à n.



Je retiens bien

Deux figures sont symétriques lorsqu'on peut les faire coïncider par pliage.



Cette figure a un axe de symétrie.