D9C. Autour des problemes du Champ Additif

Productions

Ce fichier, corrigé du fichier D9, présente l'analyse des productions d'élèves des cycles 2 et 3 dans la résolution de problèmes du champ additif. Nous avons vu précédemment qu'on appelle Champ additif, l'ensemble des situations qui peuvent être traitées à l'aide d'une addition, d'une soustraction, ou d'une combinaison de ces deux opérations. L'étude du champ additif trouve sa place au cours du cycle 2. Il s'agit de construire simultanément le sens des opérations et leurs techniques. Il faut noter que les problèmes qu'on peut résoudre avec une addition ne sont pas toujours plus faciles que ceux qui requièrent une soustraction. La technique de l'addition puis de la soustraction posée se met en place, parallèlement au répertoire des résultats mémorisés des tables d'addition. La technique de la soustraction posée est accessible en fin de cycle 2.

☞ Lire aussi **D7, D7C, D8, D8C, D9**

Les réponses apportées ici ne sont pas exhaustives. Elles dépassent cependant parfois celles attendues dans le cadre du concours pouvant ainsi enrichir votre vue sur d'autres travaux proposés ou sur l'apprentissage en général.

Analyse des productions d'élèves

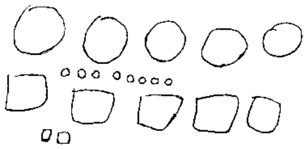
Analysez les productions ci-dessous selon les procédures mises en œuvre, les calculs utilisés, l'origine éventuelle des erreurs.

I. [1]Une enseignante propose une séance sur la résolution de problèmes additifs. Elle propose à ses élèves de CE1 ces quatre énoncés. Les élèves connaissent la technique opératoire de l'addition et la réinvestissent dans des " petits problèmes additifs ". Ils n'ont jamais traité de situation soustractive. La maîtresse a introduit " l'addition à trous " comme un simple jeu de l'esprit sans faire référence à des situations précises.

Voici les solutions proposées par deux élèves, A à gauche, B à droite.

Elève A	Elève B
Problème n° 1 Dans une école, il y a 68 filles et 52 garçons. Combien y a-t-il d'enfants dans cette école ?	

[1] D'après Lille 1997

 68 + 52 = 120 Dans cette école il y a 120 enfants	d ① u 6 | 8 +5 | 2 = 120 Dans cette école il y a 120 élèves.
Problème n° 2 Dans un train, il y a 135 personnes. Le train s'arrête, il en descend 35 et il en monte 12. Combien y a-t-il de personnes dans le train ?	
Dans ce train il y a 112 personnes 100 + 12 = 112	c d u 1 | 3 | 5 − 3 | 5 + 1 | 2 = 1 1 2 Dans ce train il y a 112 personnes.
Problème n° 3 Parmi les 57 voitures d'un parking, il y a 35 voitures rouges, les autres sont noires. Combien y a-t-il de voitures noires ?	
57 − 35 = 22 Dans ce parking il y a 22 voitures noires et 35 voitures rouges	d u 3 | 5 + 2 | 2 = 5 7 . il y a 22 voitures noires dans le parking.
Problème n° 4 Alain a acheté 24 boules pour décorer le sapin. En entrant dans la salle, il remarque que le sapin est déjà décoré. " Ca ne fait rien " lui dit Sophie, " accrochons-les quand même " Il y a maintenant 41 boules. Combien y en avait-il au départ ?	
41 − 24 · 25 Dans ce sapin il y a 25 boules de Sophie et 24 boule de Alain	d u 4 | 1 − 1 7 2 4 . Sophie a mis 17 boules sur le sapin.

Le problème 1 est combinaison de deux parties et relève d'une addition. *L'élève A* pose et effectue directement les opérations, hormis au problème 1 où une représentation imagée des dizaines et des unités est réalisée auparavant. *L'élève B* pose aussi directement les opérations sur lequel apparaît le tableau de numération pour contrôler l'alignement des chiffres en fonction de leur rang. Il s'agit sans doute d'une habitude de classe qui relève du contrat didactique entre l'enseignant et l'élève. On peut penser que l'élève a appris à utiliser ce type disposition sans comprendre quand elle est vraiment utile, comme ici dans une situation d'opérations où chacun des nombres a deux chiffres.

Les deux élèves effectuent correctement leu calcul, l'élève A n'écrit pas la retenue, l'élève B la mentionne dans la colonne des dizaines.

Le problème 2 est une succession de deux transformations qui relèvent d'une soustraction puis d'une addition. L'élève A effectue mentalement la soustraction, facilitée par les valeurs numériques en jeu, 135-35, puis pose l'addition. On peut s'étonner que l'addition ne soit pas aussi effectuée mentalement compte tenu des valeurs en jeu, 100+12. Le résultat est exact. L'élève B pose successivement les deux opérations, en colonne. Il est difficile de savoir comment il a géré dans les colonnes ces deux opérations, soustraction puis addition, car le résultat intermédiaire n'est pas mentionné.

Le problème 3 est une combinaison de deux parties dont on cherche une partie. Il relève d'une soustraction. *L'élève A* pose correctement l'opération et l'effectue sans erreur. *L'élève B* pose une addition à trous. Le premier terme est 35, le total est 57. Il effectue sans erreur la recherche de cet écart, sans doute en cherchent ce qu'il faut ajouter à 5 pour trouver 7, ce qu'il faut ajouter à 3 pour trouver 5.

Le problème 4 est une transformation qui est cherchée. Le problème relève d'une soustraction, qui doit permettre de trouver l'écart entre 24 l'état initial et 41 l'état final. L'élève A pose la bonne soustraction mais fait une erreur. Ne pouvant ôter 4 à 1, il choisit d'ôter 1 à 4 (erreur des écarts non orientés). L'écart des dizaines ne prend pas en compte de retenue. La phrase de conclusion aurait du lui permettre de voir son erreur, en ajoutant 25 et 24 qui ne donnent pas 41. *L'élève B* pose une soustraction à trou, en posant le premier terme 41 et le résultat 24. L'élève a alors effectué l'opération de bas en haut. Il a cherché ce qu'il faut ajouter à 4 pour trouver 1 … ou 11 : il trouve 7 dans la table d'addition. La retenue n'apparaît pas mais elle est prise en compte.

Pour les deux élèves, le problème est compris, le sens des opérations est bien assimilé, la phrase réponse conclut la recherche.

II. Ce problème a été proposé dans les classes de CE2 en Septembre 2000, dans le cadre de l'Évaluation Nationale CE2.

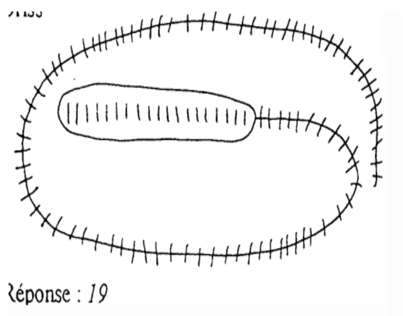
108 coureurs prennent le départ d'une course. Il y a beaucoup d'abandons. 85 coureurs seulement terminent la course. Combien de coureurs ont abandonné ?

La réponse est 23 coureurs.

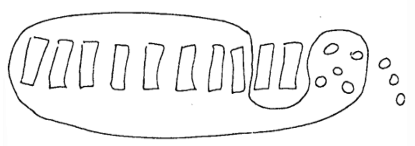
Procédures s'appuyant sur une représentation imagée des quantités et sur le comptage

L'élève F semble avoir lu *89 coureurs sont arrivés*. Il représente par des traits la collection des 108 coureurs qui ont participé à la course (sans erreur), sous la forme d'une file successive. Il barre 89 traits représentant les coureurs qui sont arrivés (confusion entre 85 et 89), et entoure et compte les traits non barrés (19) qui représentent les coureurs qui ont abandonné.

Cette procédure est valide mais le résultat est faux.



L'élève I s'appuie sur une représentation plus élaborée des quantités puisqu'il utilise une représentation imagée de la dizaine. Il représente 108 à l'aide de 10 rectangles (dizaines) et 8 ronds (unités), puis il entoure 8 rectangles et 5 unités (quantité correspondant aux 85

coureurs qui sont arrivés). La quantité non entourée (2 rectangles et 3 unités) correspond aux coureurs qui ont abandonné. Cette procédure est valide et la réponse est exacte.	 Réponse : *23 coureurs ont abandonné*

… sur le décomptage

L'élève E réalise une liste avec les numéros des coureurs en décomptant à partir de 108 ceux qui ont abandonné. Soit elle s'arrête là par manque de temps, soit elle s'arrête à 89 car elle confond numéro et quantité (89 coureurs). Elle a commis une erreur dans son énumération : le numéro 105 est présent deux fois. Hildéa ne donne pas de réponse sans doute parce qu'elle ne sait pas interpréter sa procédure qui n'est, à ce stade de l'énumération, pas valide.	108 102 95 107 101 94 106 100 93 105 99 92 105 98 91 104 97 90 103 96 89

Procédures de calcul réfléchi de type « passage à la dizaine »

Les élèves D et H utilisent le même type de procédure, basée sur l'addition à trous et le calcul réfléchi. Ils cherchent mentalement combien il faut ajouter à 85 pour atteindre 108, en plusieurs étapes. Ils font ensuite la somme des ajouts successifs. *L'élève D* fait un passage par la centaine. Son résultat final est juste.	$85 \xrightarrow{15} 100 \xrightarrow{8} 108$ Réponse : *23 coureurs ont abandonné*
L'élève H effectue le même calcul réfléchi mais passe par les dizaines : d'abord 90, puis 100, puis 108. Son résultat final comporte une erreur de calcul mental : 5 + 10 + 8 = 23 et non 24.	$85 \xrightarrow{5} 90 \xrightarrow{10} 100 \xrightarrow{8} 108$ Réponse : *Il y a 24 coureurs qui ont abandonné*

Utilisation d'une technique opératoire avec opération posée.

L'élève C fait une addition et donne comme réponse la somme des deux données. Il ne reconnaît pas une situation de soustraction. Le problème n'est pas compris, la procédure incorrecte et la réponse fausse.	$\begin{array}{r} {}^{1}\\ 108 \\ +\ 85 \\ \hline =193 \end{array}$ Réponse : *Il y a 193 coureurs qui ont abandonné*
L'élève A utilise une *addition à trou* et pose correctement l'opération. Sa procédure est correcte. Cependant il fait intervenir une retenue qui n'a pas de sens. Sa réponse est alors fausse.	$\begin{array}{r} {}^{1}\ \ \ \\ 85 \\ +\ 13 \\ \hline 108 \end{array}$ Réponse : *13*
Les élèves B et G utilisent la procédure experte de la soustraction, mais leurs réponses sont fausses. Deux hypothèses pour *l'élève B*. Peut-être fait-il une addition,	

avec erreur de retenue (183 au lieu de 193), mais il peut aussi avoir utilisé une technique opératoire erronée : il enlève 5 à 8, il trouve 3. Il enlève 0 à 8, il trouve 8. Il abaisse le 1. Cette erreur de technique, erreur des écarts non orientés, est classique dans l'apprentissage. Elle permet de contrer le problème des retenues ! Sa réponse n'a pas de sens par rapport au problème posé.	108 – 85 183 Réponse : *5 ont abandonné*
L'élève G tente d'appliquer l'algorithme de la soustraction. Il enlève 5 à 8 et trouve 3. Il ne peut pas enlever 8 à 0, il fait donc apparaître 10 dizaines en haut sous la forme de la retenue, qu'il reporte à la deuxième ligne. *Ainsi dix dizaines ont été ajoutées en haut qu'il aurait fallu compenser par 1 centaine en bas, l'écart restant alors le même.* La réponse 3 dans le rang des dizaines laisse penser que simultanément, il a reporté la retenue au rang des dizaines et a ôté 1 dizaine à 8. Il ôte alors 7 à 10 et trouve 3. Benyamine ne sait pas encore donner du sens à la retenue, en lien avec la numération décimale.	1 1 0 8 1 7 8 5 3 3 Réponse : *33 coureurs ont abandonné*

III. Voici un énoncé de problème proposé à des élèves en début d'année de CE2.

Pendant la récréation, la maîtresse de CP a tiré 62 photocopies, et celle de CM1 48 photocopies. Le compteur de la photocopieuse augmente de 1 à chaque tirage. Il indique maintenant 1043. Qu'indiquait-il avant la récréation ?

Ce problème se résout avec une addition pour trouver le nombres de tirages effectués, $62+48=110$*, puis une soustraction pour retrouver la valeur initiale du compteur* $?+110=1043$ *ou* $1043-110=933$.

Il faut bien prendre en compte que le compteur de la photocopieuse augmente de 1 à chaque tirage.

62 + 48 = 100 1043 - 100 = Le compteur indiquait 1143	*L'élève 1* réalise la première étape en faisant une erreur de retenue à son addition. Il pose ensuite une soustraction en ligne mais énonce en conclusion la somme des deux nombres. Sa réponse est fausse.
62 + 48 + 1043 = 1143	*L'élève 2* ajoute toutes les valeurs numériques de l'énoncé. Il fait une erreur de retenue dans la somme. Sa procédure n'est pas valide et montre qu'il n'a pas compris le sens de ce problème.

1043 - 62 1021 1021 - 48 1027 Le compteur indiquait 1027	*L'élève 3* pose deux soustractions, enlevant successivement le nombre de tirages réalisés à l'affichage final, puis intermédiaire du compteur. Les deux soustractions sont fausses. On retrouve ici l'erreur des écarts non orientés : 2 ôté de 3, 4 ôté de 6, puis 1 ôté de 7, 2 ôté de 4. Le sens du problème est compris mais la technique opératoire de la soustraction n'est pas maitrisée.
62 + 48 = 110  Le compteur indiquait 933	*L'élève 4* effectue correctement la première étape et pose l'opération en ligne sans erreur. Il réalise ensuite un schéma représentant la transformation sur une file numérique. Le calcul de l'affichage initial se fait par étapes, en calcul réfléchi. Il enlève 100, puis 10. Son résultat est juste, sa procédure est valide.

IV. Des maîtres de CE1 et CE2 ont proposé à leurs élèves le problème suivant :

Jean a une collection de timbres. Hier il en avait 58. Ce matin, son grand-père lui a donné des timbres qu'il a ajoutés à sa collection. Il en a maintenant 173. Combien son grand-père lui en a-t-il donnés ? »

Le problème se résout par une soustraction $173-58=115$ *ou une addition à trous* $58+115=173$

58+100=158 58+110=168 +110 5 115 timbres	*L'élève A* fait des essais successifs qu'il traduit par des additions posées en ligne. Après un premier essai où il trouve 158, il ajuste en ajoutant 110 et trouve 168. Pour s'approcher de 173, il compte de un en un depuis 168 pour atteindre 173 et représente son comptage par cinq petits traits. Il conclut correctement 115timbres, en ajoutant 5 à 110. Sa procédure est valide.
 100+10+~~4~~5=115	*L'élève B* représente le nombre 173 en le décomposant en 1 centaine représenté par 1 carré, 7 dizaines représentées par 7 rectangles, 3 unités représentées par 3 ronds. Voulant faire apparaître sur son dessin les 58 timbres donnés, il barre 1 dizaine qu'il remplace par dix unités et peut alors entourer 5 dizaines et 8 unités. Il compte alors 1 centaine, 1 dizaine et 5 unités qui lui ont été données. Une petite erreur a été rectifiée dans la représentation et dans le calcul, 4 au lieu de 5. La réponse est juste. La procédure correcte, montre que l'élève a une bonne maitrise de la numération Il lui reste à évoluer vers l'utilisation du nombre et du calcul.

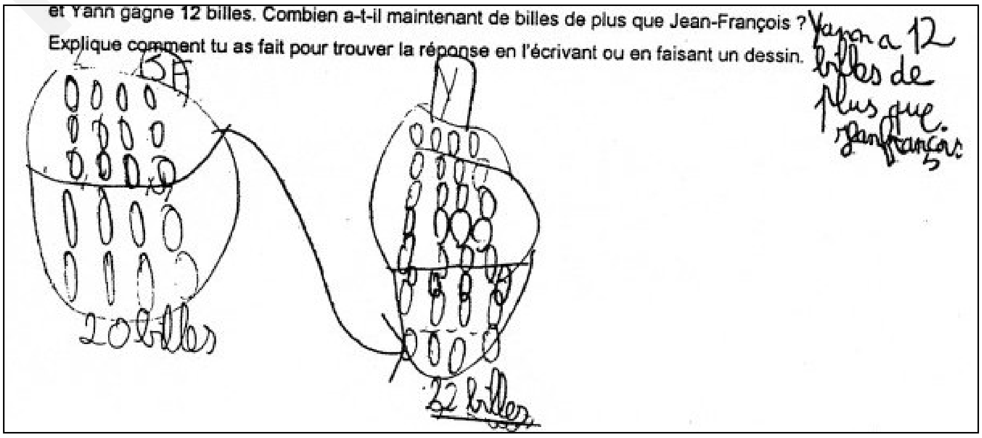
58 173 231 réponse : 231 timbres	*L'élève C* ajoute les données numériques de l'énoncé. L'addition avec retenue est réalisée correctement. Il ne conclut pas. Mais cet élève n'a pas compris à l'énoncé et a peut-être été influencé par les mots inducteurs d'ajout.
58 +115 173 il a eu 115 timbres	*L'élève D* pose une addition à trous. Elle est effectuée sans erreur et les retenues sont bien gérées. La réponse est juste. Il ne conclut pas.
173 - 58 115	*L'élève E* effectue une soustraction posée. Ne pouvant pas enlever 8 à 3, il transforme 1 dizaine de 173 en 10 unités. Il peut alors enlever 8 à 13, et il lui reste alors 6 dizaines au lieu de 7. Le résultat final est juste.
173 - 58 125	*L'élève F* effectue une soustraction posée. Le résultat est faux. L'élève a pu chercher les écarts les plus simples, c'est à dire qu'il enlève 3 à 8, ne pouvant enlever 8 à 3. Il termine en enlevant 5 à 7. Il a pu aussi oublier les retenues.

III. Voici un énoncé de problème proposé en cycle 3.

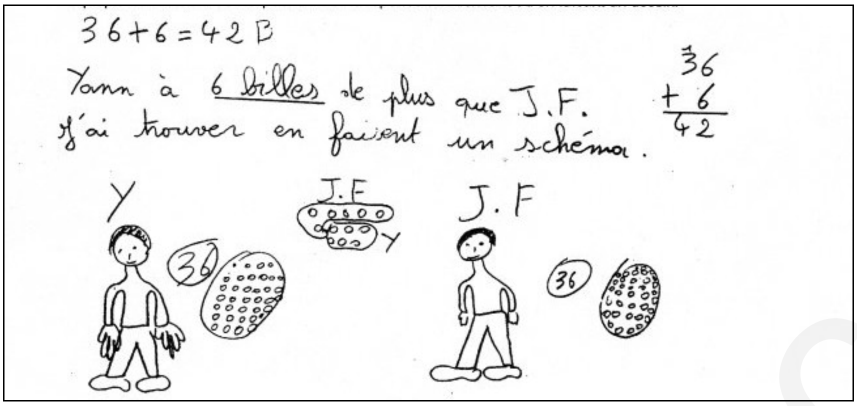
Deux enfants Yann et Jean François ont le même nombre de billes. Ils jouent ensemble et Yann gagne 12 billes. Combien a-t-il maintenant de plus que Jean François ?

Le résultat juste est : "Yann a 24 billes de plus que Jean-François".

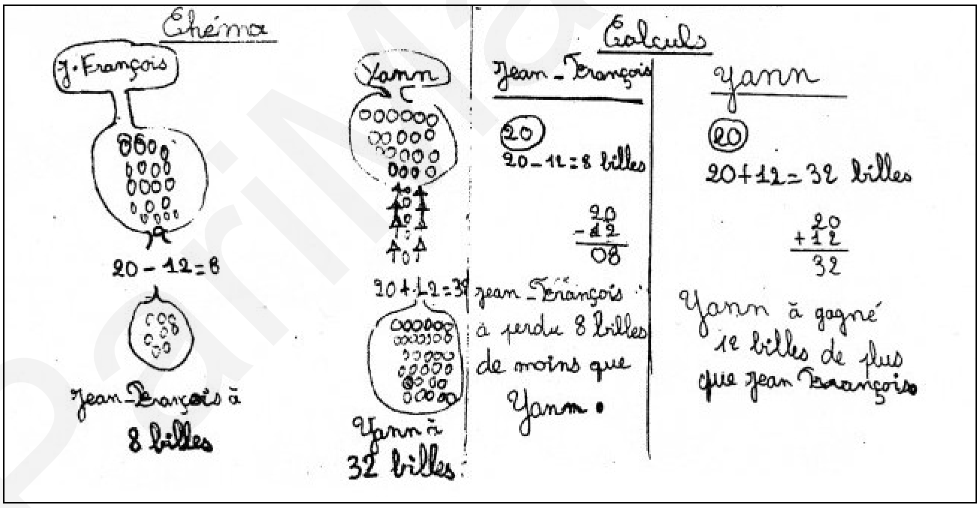
L'élève A suppose qu'ils ont chacun 20billes au départ. Il représente correctement les états initiaux des deux joueurs, la transformation et l'état final de Yohann. Cependant il oublie de prendre en compte la perte de 12 billes de Jean-François qui n'est pas explicité dans l'énoncé. Comme cette perte n'est pas clairement matérialisée sur le dessin, le résultat annonce un écart de 12 billes, correspondant sans doute aux deux valeurs numériques écrites.



L'élève B suppose qu'ils ont chacun 36 billes au départ. Il partage les 12 billes évoquées dans l'énoncé comme si la répartition devait rester équitable. Et conclut qu'il n'a en fin de partie que 6 billes de plus. Les opérations posées en ligne et en colonne sont correctes.



L'élève C suppose que chacun a 20 billes au départ. Il représente les deux situations côte à côte en dessinant les billes, la perte pour Jean François, le gain pour Yann. Les opérations en ligne et posées sont correctes. Cependant ses phrases réponses montrent deux confusions : d'une part celle des transformations, gain ou perte, avec la comparaison, Yann a gagné 12 billes *de plus* que Jean François, d'autre part, celle de la transformation avec l'état final (8), Jean François a perdu 8 billes *de moins* que Yann.



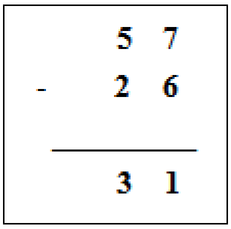
En conclusion

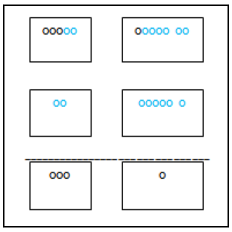
Techniques de la soustraction posée

La soustraction est plus difficile que l'addition. Elle est étudiée dès le cycle 2 dans le cadre de la résolution de problèmes et dans celui du calcul mental (mémorisation de résultats, calcul réfléchi), en prenant appui sur le matériel de numération comme par exemples les abaques.

Plusieurs techniques sont possibles, selon la conception à laquelle elles se réfèrent. Les compléments et les résultats mémorisés sont moins connus, sans doute car moins entrainés.

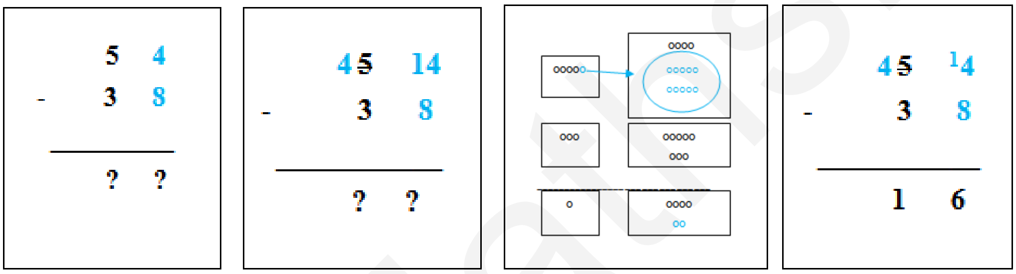
La soustraction sans retenue, si chaque chiffre occupe la bonne position, ne présente pas de difficultés particulières.





L'apprentissage se mène simultanément avec celui des soustractions avec retenue. Le choix d'une technique se pose au cycle 3. Cependant l'enseignant(e) veillera à laisser les élèves libres d'utiliser une technique qu'ils comprennent et maitrisent. Le calcul s'effectue de droite à gauche.

Une première technique s'appuie sur la numération et la valeur donnée à chaque chiffre dans l'écriture des nombres. La technique s'appuie sur les échanges entre unités, dizaines, centaines.

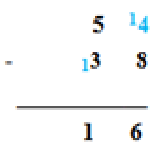


L'inconvénient majeur de cette technique repose sur les surcharges de calculs quand certains rangs sont nuls comme 206- 178.

Une seconde technique s'appuie sur l'invariance de la différence par ajout simultané d'un même nombre aux deux termes de la soustraction. Cette technique est très souvent utilisée en calcul réfléchi. Ainsi l'écart entre 38 et 54 est le même que l'écart entre 40 (38+2) et 56 (54+2). On trouve alors facilement sa valeur 16.

En calcul posé, on va considérer que l'écart entre 54 et 38 est le même que celui entre 54(+10) et 38(+10), mais au lieu d'ajouter une dizaine aux deux termes, on ajoute 10 unités au premier terme (on obtient 14 unités) et 1 dizaine au deuxième terme (on obtient 4 dizaines). On peut alors retrancher 8 unités aux 14 unités obtenues, ce qui était impossible avec les 4 unités de départ. Vous remarquerez que le statut des retenues (qui n'en sont pas, en fait) n'est pas le même. Pour les unités le 1 représente 10 unités. Pour les dizaines, le 1 représente 1 dizaine.

Cette technique très utilisée en France se pratique souvent par automatisme. Assurez-vous de bien l'avoir comprise pour pouvoir l'enseigner et lui donner un sens difficilement accessible pour des élèves de cycle 3.

	
Calcul posé	*Calcul réfléchi*

Une troisième technique repose sur la notion de complément, et s'appuie sur l'addition à trou. Le calcul de la différence 43-26 consiste cette fois à chercher ce qu'il faut ajouter à 26 pour trouver 43.
En calcul réfléchi, on complète cette fois 26 jusqu'à 30 (4), puis 30 jusqu'à 40 (10), puis enfin 40 jusqu'à 43 (3). La valeur de l'écart est de 17.
En calcul posé, on cherche combien il faut ajouter au chiffre 6 des unités de 26 pour trouver le chiffre 3 des unités de 43, soit 13 unités. Il faut donc prendre en compte la retenue de la dizaine ajoutée. Au rang des dizaines, on cherche combien il faut ajouter à 3 (2+1) pour retrouver 4.

☞ L'enseignant/e peut enfin s'interroger sur l'importance à accorder à la maîtrise de la technique pour des soustractions complexes comme par exemple 3045-1156, et un regard personnalisé sur les capacités des élèves est à prendre en compte. L'utilisation de la calculatrice peut apporter une aide à ne pas négliger comme validation d'un résultat, ou comme outil pour le trouver si l'on veut privilégier ou tout au moins dissocier en termes d'évaluation, la compétence du sens et la compétence de la technique au sein d'une résolution de problèmes.