M3. Méthodes en CALCUL NUMERIQUE et LITTERAL

Calcul Numérique

Voici les règles de base vues au collège, concernant le calcul dans l'ensemble des réels.

Les fractions

Une fraction est **irréductible** quand numérateur et dénominateur ont pour seul diviseur commun 1. On peut simplifier une fraction en divisant numérateur et dénominateur par un même nombre k non nul : $\frac{a}{b}=\frac{k\times a}{k\times b}$

· Principales propriétés de calculs, a, b, c, d étant des entiers relatifs et b, c, d non nuls :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

La réduction au même dénominateur ne s'impose que pour les sommes.

$$\frac{5}{6}+\frac{4}{15}=\frac{25}{30}+\frac{8}{30}=\frac{33}{30}=\frac{\cancel{3}\times 11}{\cancel{3}\times 10}=\frac{11}{10} \qquad \frac{5}{6}\times\frac{4}{15}=\frac{5\times 4}{6\times 15}=\frac{\cancel{5}\times 2\times\cancel{2}}{\cancel{2}\times 3\times\cancel{5}\times 3}=\frac{2}{9} \qquad \frac{5}{6}:\frac{4}{15}=\frac{5}{6}\times\frac{15}{4}=\frac{5\times\cancel{3}\times 5}{2\times\cancel{3}\times 2\times 2}=\frac{25}{8}$$

Penser à simplifier les calculs avant de les effectuer.

Les puissances

Soit a un nombre réel non nul, et n un entier naturel strictement supérieur à 1.

L'écriture a^n, appelée « puissance de a » d'exposant n, représente le produit de n facteurs égaux à a :

$a^n=\underbrace{a\times.....\times a\times a}_{n \text{ fois}}$. On définit alors a^{-n} comme l'inverse de a^n : $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ et $a^0=1$.

· Principales propriétés de calculs, n et p étant deux entiers relatifs et a un réel non nul :

$$a^n\times a^p=a^{n+p} \qquad \frac{a^n}{a^p}=a^{n-p} \qquad \left(a^n\right)^p=a^{n\times p}$$

Ainsi $\frac{2\times 10^5\times 5\times(10^3)^2}{4\times 10^{-5}\times 25\times 10^4}=\frac{10\times 10^5\times 10^6}{100\times 10^{-1}}=\frac{10^{12}}{10^2\times 10^{-1}}=\frac{10^{12}}{10^1}=10^{11}$

La décomposition canonique d'un nombre donne la valeur de ce nombre dans le système décimal. Dans cette écriture, les puissances de dix représentent les différents rangs de notre numération : $N=m\times 10^3+c\times 10^2+d\times 10^1+u\times 10^0+a\times 10^{-1}+b\times 10^{-2}$..... où $m, c, d, u, a, b\ldots$ représentent les chiffres de cette écriture.

Les racines carrées

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif dont le carré est a.

$$\text{Pour tout réel } a \text{ positif } \left(\sqrt{a}\right)^2=a$$

· Principales propriétés de calculs, a et b étant deux réels positifs, b non nul.

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Ces deux égalités s'utiliseront « dans les deux sens », d'une part pour décomposer une expression en produit ou en quotient, d'autre part pour mettre l'écriture sous la forme $a\sqrt{b}$, b étant le plus petit possible.

Catherine Marchetti -Jacques
Digitally signed by Catherine Marchetti-Jacques
DN: cn=Catherine Marchetti-Jacques, o=PariMaths.com, ou, email=info@parimaths.com, c=FR
Date: 2016.01.25 14:28:09 -07'00'
© PariMaths.com

On utilise alors la propriété suivante : Pour tout réel a positif $\sqrt{a^2}=a$. On dit parfois qu'on fait « sortir » les carrés du radical. Ainsi par exemple : $\sqrt{75}=\sqrt{25\times3}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

Attention : pas de propriété sur l'addition des racines carrées**.** En général $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$.

Par exemple $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ alors que $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

Cependant $\sqrt{16}\times\sqrt{9}=\sqrt{16\times9}=\sqrt{4^2\times3^2}=\sqrt{(4\times3)^2}=4\times3=12$

Il faudra donc faire preuve de prudence en calcul littéral, par exemple $\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$ pour *tout a et b*.

Calcul littéral

↘ Nous avons vu en S4 que le calcul littéral est indispensable dès que la question d'une généralisation est abordée. En voici un exemple : il est aisé de calculer la somme des entiers naturels de 1 à 5, un peu plus long de calculer la somme jusqu'à 20. Qu'en est-il au-delà ?

La somme de n premiers termes de la suite numérique est égale à $S=1+2+3+....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Pour le démontrer, on ajoute terme à terme ces n nombres entiers consécutifs, sous la forme :

$$\begin{array}{lcccccccc} S= & n & + & (n-1) & +.....+ & 2 & + & 1 \\ S= & 1 & + & 2 & +.....+ & (n-1) & + & n \\ 2S= & (n+1) & + & (n+1) & +.....+ & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

. *On trouve alors* n *fois* $(n+1)$ pour $2S$, d'où $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Ce résultat est applicable pour tout entier naturel n.

↘ Les règles de calcul littéral, si elles sont pratiques, par exemple pour développer une expression, voire indispensables pour factoriser, ne sont pas à utiliser spontanément en calcul numérique**.**

Penser à la perte de temps et surtout d'efficacité si vous n'analysez pas vos calculs

Ainsi pour développer $A(x)=(2x+5)^2$, l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ permet de trouver $A(x)=4x^2+20x+25$. Cependant pour calculer la valeur de $A(x)$ pour $x=3$, on va remplacer x par sa valeur 3 dans l'expression, et calculer $A(3)=(2\times3+5)^2=(6+5)^2$. L'identité remarquable perd alors tout son intérêt puisque $6+5=11$ et qu'on trouve directement $A(3)=11^2=121$.

Ainsi pour calculer la valeur de l'expression $B(x)=(3x+1)^2-(3x-1)^2$ pour $x=\frac{1}{2}$, on rencontre parfois dans certaines copies ce type de calcul, pouvant engendrer une multitude d'erreurs !

$$B(\frac{1}{2})=(3\times\frac{1}{2}+1)^2-(3\times\frac{1}{2}-1)^2=(\frac{3}{2}+1)^2-(\frac{3}{2}-1)^2=(\frac{9}{4}+2\times\frac{3}{2}\times1+1)-(\frac{9}{4}-2\times\frac{3}{2}\times1+1)$$
$$=(\frac{9}{4}+3+1)-(\frac{9}{4}-3+1)=(\frac{9}{4}+4)-(\frac{9}{4}-2)=\frac{9}{4}+4-\frac{9}{4}+2=6$$

On aura tout intérêt à développer $B(x)$ puis à remplacer x par sa valeur.

Ainsi : $B(x)=(9x^2+6x+1)-(9x^2-6x+1)=9x^2+6x+1-9x^2+6x-1=12x$ $\quad B(\frac{1}{2})=12\times\frac{1}{2}=6$

© PariMaths.com