M4. Méthodes en CALCUL et RESOLUTION ALGEBRIQUE

Nous avons vu en S6 que la mise en équation d'un problème va permettre la mise en œuvre d'une procédure de résolution algébrique. Cette résolution se fait en plusieurs étapes, et nécessite d'une part de savoir passer d'un langage « littéraire » et « arithmétique » au langage « algébrique », d'autre part de savoir résoudre les équations obtenues.

Calcul littéral

↘ Certaines expressions reviennent fréquemment dans les mises en équation ou les généralisations. On peut retenir celles-ci, pour *k* et *n* entiers naturels :

- Un nombre pair s'écrit $2k$, un nombre impair $2k+1$
- Trois nombres entiers consécutifs : $n,\ n+1,\ n+2$ mais aussi $n-1,\ n,\ n+1$
- Deux nombres pairs consécutifs : $2k,\ 2k+2$ et deux nombres impairs consécutifs : $2k+1$, $2k+3$ ou $2k-1, 2k+1$

  Ainsi on peut démontrer que la somme des carrés de deux nombres impairs consécutifs est un nombre pair car $S=(2k-1)^2+(2k+1)^2=4k^2-4k+1+4k^2+4k+1=8k^2+2=2(4k^2+1)=2k'$, ou encore que leur différence est un multiple de 8 car $D=(2k+1)^2-(2k-1)^2=4k^2+4k+1-4k^2+4k-1=8k$

↘ Le développement d'une identité remarquable peut toujours se faire en prenant appui sur la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction. La mémorisation de ces identités remarquables sert surtout à gagner du temps. Ainsi :

$(7x-2)^2=49x^2-28x+4$, mais on peut aussi le retrouver par $(7x-2)^2=(7x-2)(7x-2)=49x^2-14x-14x+4=49x^2-28x+4$

$(\frac{x}{2}-3)(\frac{x}{2}+3)=(\frac{x}{2})^2-3^2=\frac{x^2}{4}-9$, que l'on peut obtenir avec $(\frac{x}{2}-3)(\frac{x}{2}+3)=\frac{x}{2}\times\frac{x}{2}+3\times\frac{x}{2}-3\times\frac{x}{2}-3\times3=\frac{x^2}{4}-9$

↘ La factorisation nécessite souvent le recours aux identités remarquables et à la reconnaissance de forme, comme par exemple la classique différence de deux carrés a^2-b^2 :

Ainsi, $x^2-16=x^2-4^2=(x-4)(x+4)$, ou encore $\frac{4}{25}-9x^2=(\frac{2}{5}+3x)(\frac{2}{5}-3x)$

On voit dans ces deux exemples, que la factorisation serait difficile sans la reconnaissance de l'identité $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Il en est de même pour les expressions de la forme $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ ou $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

Ainsi $121n^2-220n+100=(11n+10)^2$ ou encore $81k^2-36k+4=(9k-2)^2$

↘ Ces identités remarquables sont donc à connaître par cœur et on évitera les « mauvais réflexes » qui génèrent des erreurs : pour *p*, *q*, *k* non nuls $(p+q)^2\neq p^2+q^2$, ou encore $(k+1)^2\neq k^2+1$!!

Calcul algébrique

↘ Méthode de résolution d'une équation ou d'une inéquation du premier degré

La résolution d'équation ou d'inéquation du premier degré repose sur le principe de la balance. La transposition d'un terme d'un membre dans un autre n'est en fait qu'un « raccourci de l'équilibrage » de l'égalité (inégalité) alors qu'on ajoute membre à membre un même terme (ici $-b$).

$$\boxed{-b}\quad \begin{array}{l} ax+b=c \\ ax+b-b=c-b \\ ax=c-b \end{array} \quad \boxed{-b} \qquad \boxed{-b}\quad \begin{array}{l} ax+b<c \\ ax+b-b<c-b \\ ax<c-b \end{array} \quad \boxed{-b}$$

C'est pourquoi il faut penser à changer de signe quand on transpose un terme.

Nous avons vu en S4 que les équations du type $ax+b=c \quad (avec\ a\neq 0)$ ont en général une solution unique $x=\dfrac{c-b}{a}$, obtenue en divisant par a non nul les deux membres de l'égalité $ax=c-b$

Ainsi $3x=81$ *a pour solution* $x=\dfrac{81}{3}=27$, *ou encore* $-3x=15$ *a pour solution* $x=\dfrac{15}{-3}=-5$

Par contre $-3+x=15$ *a pour solution* $x=15+3=18$

La résolution de l'inéquation $ax+b\leq c \quad (avec\ a\neq 0)$ demande plus de vigilance. Equivalente à l'inéquation $ax\leq c-b$, les valeurs de x solutions sont dépendantes du signe de a :

- Si $a>0$, alors $x\leq\dfrac{c-b}{a}$, et l'ensemble des solutions est $S=\left]-\infty;\dfrac{c-b}{a}\right]$
- Si $a<0$, alors l'ordre change et $x\geq\dfrac{c-b}{a}$. L'ensemble des solutions est alors $S=\left[\dfrac{c-b}{a};+\infty\right[$.

Ainsi $7x\leq 105$ a pour solutions $x\leq\dfrac{105}{7}$ soit $x\leq 35$, mais $-3-x\leq 15$ a pour solutions $-x\leq 15+3$ soit $-x\leq 18$ c'est à dire $x\geq -18$.

On représente graphiquement les solutions d'une inéquation sur la droite graduée des réels. La résolution d'un système d'inéquations peut alors se faire graphiquement.

Ainsi S=[-18;+∞[est représenté par :

Le système $\begin{cases}-3-x\leq 15\\ 7x\leq 105\end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases}x\geq -18\\ x\leq 35\end{cases}$ et l'ensemble de ses solutions est l'intervalle $S=[-18;35]$

Si les inégalités sont au sens large ($\leq$ ou $\geq$), les bornes de l'intervalle sont fermées et leurs valeurs sont dans l'ensemble des solutions. Si les inégalités sont au sens strict (< ou >), les bornes de l'intervalle sont ouvertes et leurs valeurs ne font pas partie de l'ensemble des solutions.

Méthode de résolution d'équations du second degré

La résolution d'équations du second degré repose sur le principe de la factorisation et de la propriété vue au collège : « un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. »
On sera donc amené à transformer les expressions afin de se ramener à cette forme.

Nous avons vu en S5 que les équations de la forme $x^2 = a$ ont deux, une ou zéro solutions selon que a est respectivement un réel positif, nul ou négatif. En effet $x^2 = a$ peut s'écrire $x^2 - a = 0$.

- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution dans l'ensemble des réels, puisque le carré d'un nombre réel est positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = 0$ a pour unique solution $x = 0$
- Si $a > 0$, alors a est le carré de $\sqrt{a}$ et on retrouve la différence de deux carrés $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$

$(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) = 0$ $\quad$ $soit\ x-\sqrt{a}=0, soit\ x+\sqrt{a}=0$ $\quad$ d'où deux solutions $\sqrt{a}\ et -\sqrt{a}$

Cependant dans les problèmes, il faudra veiller à tenir compte du contexte afin de s'assurer que les deux solutions sont acceptables. Ainsi lors de l'utilisation du théorème de Pythagore dans un triangle rectangle, on est souvent amené à résoudre ce type d'équation et à ne retenir qu'une seule solution puisque la donnée inconnue représente une longueur, et est donc positive.

Si un triangle MNP est rectangle en P et tel que $MN = 12\ et\ NP = 8$ alors $MN^2 = MP^2 + NP^2$

$MP^2 = MN^2 - NP^2 = 144 - 64 = 80$ d'où $MP = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Nous avons vu que la factorisation peut permettre de résoudre un certain nombre d'équations du second degré. Cependant dans certains cas, l'équation peut se ramener à une équation du premier degré.
L'observation est donc de rigueur !

- Mr B. choisit un nombre, lui enlève 3, élève son résultat au carré, puis enlève 4 au carré obtenu. Il trouve 0. Quel nombre a t'-il choisi au départ ? Y a-t-il plusieurs choix possibles ?

Soit x le nombre choisi par Mr B. Les étapes de calcul successives permettent d'écrire que $(x-3)^2 - 4 = 0$.

La première réponse qui vient à l'esprit est $(x-3)^2 = 4$ $\quad x-3=2$ $\quad x=5$.

Pourtant la factorisation $(x-3)^2 - 4 = (x-3)^2 - 2^2 = (x-3-2)(x-3+2) = (x-5)(x-1)$ permet de trouver les deux solutions de l'équation $(x-3)^2 - 4 = 0$, à savoir $x = 5\ et\ x = 1$. Mr B. a donc pu choisir l'une de ces deux valeurs au départ.

- Un pavé droit a pour dimensions (en cm) $x, x-2, x+3$, avec $x > 2$. Pour quelles valeurs de x le volume de ce pavé sera-t-il égal au volume du cube d'arête x ?

$V_{pavé} = x(x-2)(x+3)$ et $V_{cube} = x^3$, d'où l'équation de degré trois $x(x-2)(x+3) = x^3$. En divisant chaque membre par x non nul, on se ramène à une équation de second degré $(x-2)(x+3) = x^2$. En développant chaque membre, on se ramène à une équation du premier degré $x^2 + x - 6 = x^2\ soit\ x - 6 = 0.$ Il faut donc choisir $x = 6$. Le pavé aura pour dimensions *6cm, 4cm et 9cm*, le cube aura pour arête *6cm*. Leur volume commun est égal à $216cm^3$

↘ Méthode de résolution d'un système de deux équations à deux inconnues (du premier degré)

Nous avons vu en S5 que les solutions d'un système formé de deux équations de la forme $ax+by+c=0$ où a,b,c,x,y sont des réels, sont les couples $(x,\ y)$ pour lesquels les deux équations sont simultanément vérifiées. Un système peut avoir une solution, pas de solution ou une infinité de solutions.

Les méthodes couramment utilisées pour résoudre un système sont la méthode de substitution et la méthode d'addition ou de combinaison linéaire.

. Par combinaison linéaire

Pour résoudre le système $\begin{cases} 2x+4y+1=0 & (1) \\ x-5y+4=0 & (2) \end{cases}$, on multiplie les deux membres de l'équation (2) par -2, puis on remplace l'équation (2) par une nouvelle équation (3) obtenue en ajoutant membre à membre les deux équations du système : le coefficient -2 a été choisi pour qu'une des deux inconnues (ici *x*) disparaisse par addition. L'équation (3) permet de calculer *y*. En remplaçant *y* par sa valeur dans l'équation (1) on trouve *x*.

$$\begin{cases} 2x+4y+1=0 \\ -2x+10y-8=0 & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+4y+1=0 \\ 14y-7=0 & (3) \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+4y+1=0 \\ y=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2} & (3) \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Le système a pour solution le couple $(-\frac{3}{2};\frac{1}{2})$

. Par substitution

Pour résoudre le système $\begin{cases} 5x+y=4 & (1) \\ 120x+30y=114 & (2) \end{cases}$, la méthode de substitution est intéressante car une des deux inconnues peut s'exprimer directement en fonction de l'autre (ici *y* dans l'équation (1)). On remplace *y* par sa nouvelle expression dans l'autre équation. L'équation (2) permet alors de calculer *x*. En remplaçant *x* par sa valeur dans l'équation (1), on trouve la valeur de *y*, et le couple solution (*x*,*y*) solution…quand il existe.

$$\begin{cases} y=4-5x & (1) \\ 120x+30y=114 & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} y=4-5x \\ 120x+30(4-5x)=114 \end{cases} \quad \begin{cases} y=4-5x \\ -30x+120=114 \end{cases} \quad \begin{cases} y=4-5x \\ x=\dfrac{-6}{-30}=\dfrac{1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} y=4-5\times(\dfrac{1}{5})=3 \\ x=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

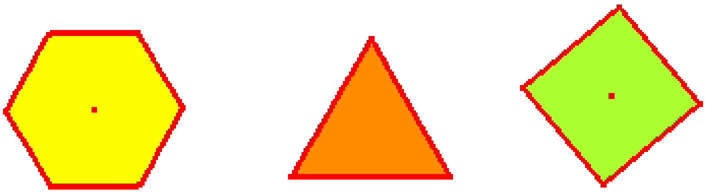
On peut aussi simplifier les coefficients de l'équation (2) en les divisant par 30. Le système s'écrit alors $\begin{cases} y=4-5x & (1) \\ 4x+y=3{,}8 & (2) \end{cases}$.

Le système admet pour solution le couple $(\frac{1}{5};3)$

↘ Méthode pour résoudre algébriquement un problème

Après avoir repéré et nommé les inconnues du problème, la mise en équation des données fait passer du langage « littéraire, conté » au langage algébrique. Il reste à résoudre ces équations, puis à valider leurs solutions en tenant compte du contexte du problème. On terminera en revenant au langage conté en rédigeant la réponse au problème.

- Mr B. possède un jeu de cartes avec trois types de cartes représentant des formes géométriques. Les unes représentent des hexagones réguliers, les secondes des triangles équilatéraux, les dernières des carrés. Il a en tout 19 cartes et le nombre total de côtés sur ses cartes est de 80.



Trouvez le nombre de cartes de chaque type, sachant que ces nombres sont compris entre 1 et 10.

- Soient t le nombre de triangles, c le nombre de carrés, h le nombre d'hexagones.
- Le nombre total de cartes se traduit par $c+t+h=19$

  Le nombre total de côtés se traduit par $4\times c+3\times t+6\times h=80$.

  Le troisième renseignement impose $1\leq c\leq 10$ *et* $1\leq t\leq 10$ *et* $1\leq h\leq 10$.

D'où le système $\begin{cases} c+t+h=19 & (1) \\ 4c+3t+6h=80 & (2) \end{cases}$ qui présente trois inconnues pour deux équations et des conditions de validité des solutions.

- On peut alors le remplacer successivement par :

$\begin{cases} c=19-t-h & (1) \\ 4c+3t+6h=80 & (2) \end{cases}$ $\begin{cases} c=19-t-h & (1) \\ 4(19-t-h)+3t+6h=80 & (2) \end{cases}$ $\begin{cases} c=19-t-h & (1) \\ 76-4t-4h+3t+6h=80 & (2) \end{cases}$ $\begin{cases} c=19-t-h & (1) \\ -t+2h=4 & (2) \end{cases}$ $\begin{cases} c=19-t-h & (1) \\ h=\dfrac{4+t}{2}=2+\dfrac{t}{2} & (2) \end{cases}$

Les valeurs de *c, t, et h* étant entières et comprises entre 1 et 10, on peut donc choisir la valeur de t parmi $t=2,\ t=4,\ t=6,\ t=8$.

A chacune de ces valeurs sont associées des valeurs pour *c et h* :

$t=2,\ h=3,\ c=14$, et $t=4,\ h=4,\ c=11$, non acceptables car $c>10$

$t=6,\ h=5,\ c=8$, et $t=8,\ h=6,\ c=5$, toutes deux acceptables.

Mr B. peut donc avoir dans son jeu de cartes 6 triangles, 5 hexagones et 8 carrés, ou encore 8 triangles 6 hexagones et 5 carrés.

Vérification possible : $6+5+8=19$ et $d'une\ part\ 6\times 3+5\times 6+8\times 4=80\quad et\ d'autre\ part\ 8\times 3+6\times 6+5\times 4=80$.