M5. Méthodes en RESOLUTION GRAPHIQUE de problèmes

Nous avons vu en S6 et en M4 que la mise en équation d'un problème va permettre la mise en œuvre d'une procédure de résolution algébrique. Cependant il est parfois plus rapide, voire nécessaire, de traiter la résolution sous forme graphique. Les solutions sont alors données sous la forme d'un lieu de points, dont les coordonnées sont solutions du problème.

Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues

Nous avons vu en S5 que les solutions d'un système formé de deux équations $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$, où a, b, c, a', b', c' sont des réels, sont les couples (x, y) pour lesquels les deux équations sont simultanément vérifiées. Un système peut donc avoir une solution, pas de solution ou une infinité de solutions.

Nous allons étudier ici la résolution graphique d'un tel système.

Une équation de la forme $ax+by+c=0$ est l'équation d'une droite que l'on peut représenter dans un repère. Chaque équation du système sera donc représentée graphiquement par une droite. Si les deux droites sont sécantes, le système a une solution unique, si les deux droites sont parallèles, le système n'a pas de solution, sauf cas particulier où elles sont confondues, où il y a alors une infinité de solutions.

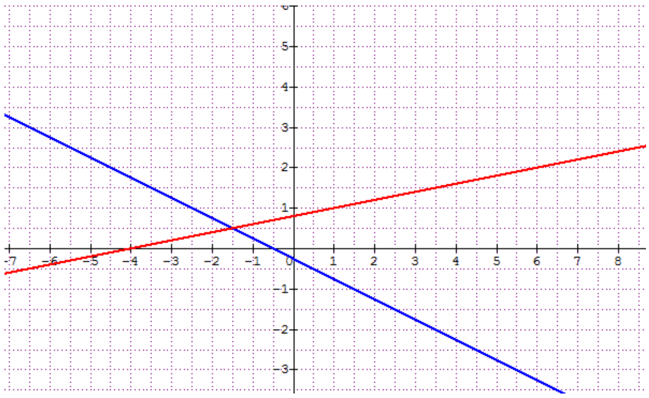
Ainsi, nous avons trouvé algébriquement en S5, que le système $\begin{cases} 2x+4y+1=0 \quad (1) \\ x-5y+4=0 \quad (2) \end{cases}$ a pour solution le couple $(-\frac{3}{2};\frac{1}{2})$.

L'équation (1) est l'équation de la droite D_1, dont l'équation réduite est de la forme $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$. Le tableau ci-dessous nous donne deux points (trois par sécurité) permettant de tracer cette droite dans le repère choisi.

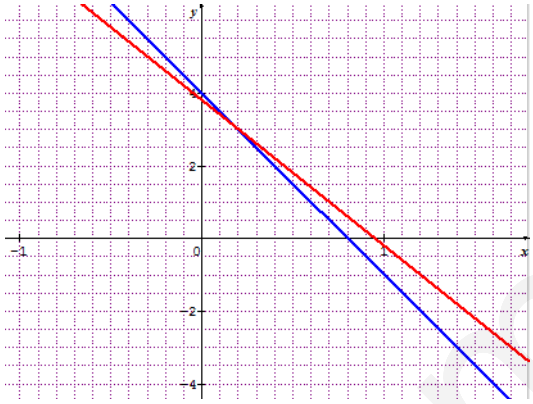
De même l'équation (2) est l'équation de la droite D_2, pour laquelle nous déterminons aussi trois points. Son équation réduite est de la forme $y=\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$.

$D_1 : 2x+4y+1=0$					$D_2 : x-5y+4=0$		
x	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$		0	-4	1
y	$-\frac{1}{4}$	0	1		$\frac{4}{5}$	0	1

Les graphiques ci-dessous sont tracés avec le logiciel *Sine qua non*



Graph1



Graph2

Sur le graphique 1, les deux droites D_1 et D_2 sont sécantes au point I de coordonnées $(-\frac{3}{2};\frac{1}{2})$. La solution du système est donc le couple $(-\frac{3}{2};\frac{1}{2})$.

De même le graphique 2 permet de confirmer le couple solution $(\frac{1}{5};3)$ trouvé algébriquement pour le système $\begin{cases} 5x+y=4 \quad (1) \\ 120x+30y=114 \quad (2) \end{cases}$.

Le choix de l'échelle sur les deux axes permet de lire plus ou moins aisément la solution.

➘ Résolution d'un système du premier degré d'inéquations à deux inconnues

Nous avons vu en S5 la résolution des inéquations à une inconnue, du type $ax+b\le c \quad (avec\ a\neq 0)$, avec leur représentation graphique de l'ensemble des solutions sur la droite graduée, ainsi que la résolution de système qui en découle. Nous allons étudier ici la résolution graphique d'un système d'inéquations à deux inconnues, de type $\begin{cases} ax+by+c\le 0 \\ a'x+b'y+c'>0 \end{cases}$ par exemple, avec le cas $\begin{cases} 2x+y+3\le 0 \quad (1) \\ x+5y-1>0 \quad (2) \end{cases}$.

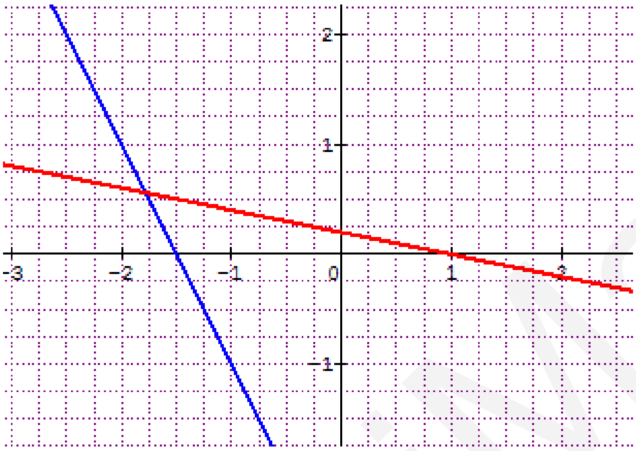
L'équation $2x+y+3=0$ est celle de la droite D_1, qui passe par les points (0,-3) et (-2,1). Sa forme réduite est $y=-2x-3$.

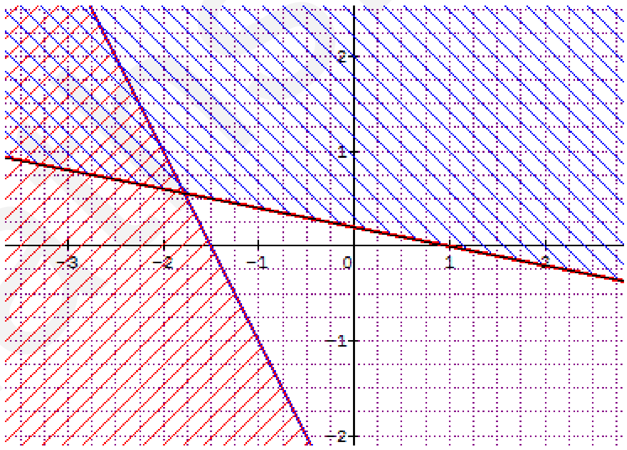
L'équation $x+5y-1=0$ est celle de la droite D_2, qui passe par les points (1,0) et (6,-1). Sa forme réduite est de la forme $y=-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$.

Sur le premier graphique ci-dessous, on voit que les deux droites sont sécantes en un point I, dont les coordonnées seraient le couple solution du système d'équations $\begin{cases} y=-2x-3 \\ y=-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5} \end{cases}$.

La droite D_1 partage le plan en deux demi-plans : la droite D_1 est la frontière et représente l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $2x+y+3=0$, un demi plan P_1 est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $2x+y+3<0$, l'autre demi plan P_2 est l'ensemble des points dont les coordonnées

vérifient $2x+y+3>0$. Pour connaître le demi-plan P_1, on choisit un point de coordonnées « simples » pour voir si ses coordonnées vérifient l'inégalité : ainsi pour l'origine de coordonnées (0,0), en remplaçant x par 0 et y par 0, on obtient $2\times 0+0+3>0$. L'origine appartient donc au demi plan P_2. La région représentant les solutions de l'inéquation (1), soit $2x+y+3\leq 0$, est donc P_1, région à rayures rouge sur le graphique, et la droite D_1 puisque l'inégalité est large (avec égalité).
De même la droite D_2 partage le plan en deux demi-plans : la droite D_2 est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $x+5y-1=0$, un demi plan P'_1 est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $x+5y-1<0$, l'autre demi plan P'_2 est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $x+5y-1>0$. Pour l'origine, $0+5\times 0-1<0$. L'origine appartient donc au demi-plan P'_1. La région représentant les solutions de l'inéquation (2), soit $x+5y-1>0$, est donc P'_2, région à rayures bleues sur le graphique, cette fois la droite D_2 est exclue puisque l'inégalité est stricte (sans égalité).
Les solutions du système sont donc tous les couples (x, y), coordonnées des points situés dans la région intersection de P_1 (rouge) et de P'_2 (bleu), et de la droite D_1.





Résolution graphique de problèmes du premier degré

Nous avons vu qu'après avoir repéré et nommé les inconnues du problème, la mise en équation (ou en inéquation) des données passe par le langage algébrique. La résolution peut alors se faire par le calcul ou graphiquement comme nous venons de le voir. La validation des solutions en tenant compte du contexte du problème est alors nécessaire, ainsi qu'un retour rédigé au questionnement initial.

Exemple 1 [1]

A. Dans la cour d'une école, il y a des bicyclettes et des tricycles. Paul sait qu'il n'y a pas plus de dix bicyclettes, ni plus de dix tricycles, et qu'il y a en tout 31 roues. Avec ces renseignements, combien peut-il y avoir de bicyclettes et de tricycles ?

[1] D'après G2-2008

Ce problème, compte tenu des valeurs numériques en jeu (entiers naturels), peut se résoudre par essais successifs, sachant que le nombre de bicyclettes , ainsi que celui des tricycles, est un entier compris entre 1 et 10, et que le nombre de roues est égal à 31.

B2 | f_x =(31-2*A2)/3

A	B	C	D
bicyclettes	tricycles	roues	
1	9,66666667	31	
2	9	31	
3	8,33333333	31	
4	7,66666667	31	
5	7	31	
6	6,33333333	31	
7	5,66666667	31	
8	5	31	
9	4,33333333	31	
10	3,66666667	31	

Le tableur fait rapidement apparaître trois solutions entières : 2 bicyclettes et 9 tricycles ($11\times 2+3\times 3=31$), 5 bicyclettes et 7 tricycles ($2\times 5+3\times 7=31$ roues), 8 bicyclettes et 5 tricycles ($2\times 8+3\times 5=31$ roues).

On se rend bien compte ici des limites de cette méthode si le champ numérique est plus vaste, mais dans l'ensemble des entiers, elle permet de proposer dès l'école ce type de problème. On voit aussi qu'une difficulté est de savoir si l'on a trouvé toutes les solutions possibles.

B. Un distributeur de remorques de vélo dispose de remorques à trois roues et de remorques à quatre roues. Il reçoit les roues, toutes identiques et doit les monter sur les remorques.

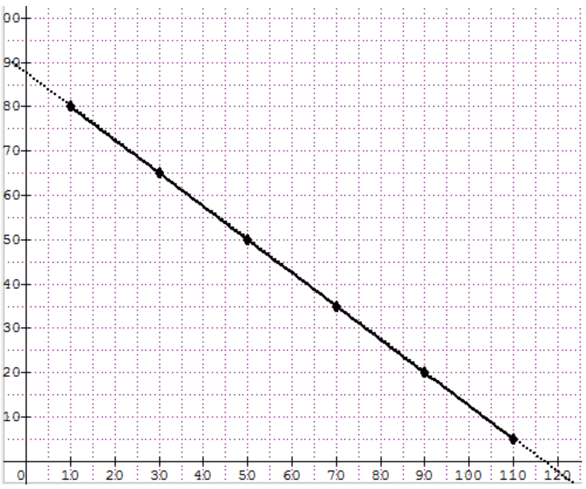
Déterminer graphiquement les différentes commandes qu'il peut satisfaire en utilisant toutes les roues, sachant qu'il impose de livrer chaque type de remorques par lots de 5 :

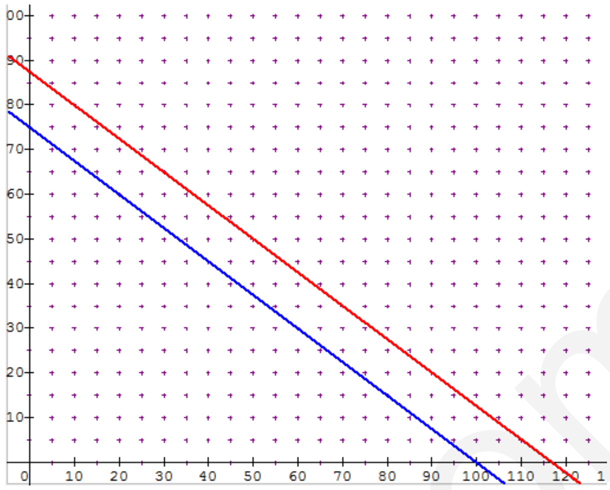
a. Dans le cas où il reçoit 350 roues.

b. Même question s'il reçoit au moins 300 roues et au plus 350 roues.

En appelant x le nombre de remorques à trois roues et y le nombre de remorques à quatre roues, le nombre total de roues (350) est donc égal à $3\times x+4\times y$, d'où l'équation $3x+4y=350$. Le graphique ci-dessous fait apparaître la droite d'équation $3x+4y=350$ ou encore $y=-0,75x+87,5$. Les points de cette droite ont tous des coordonnées (x, y) qui pourraient vérifier l'égalité $3x+4y=350$, mais les solutions du problème sont seulement les couples (x, y) où x et y ont des valeurs entières multiples de 5. On va donc choisir de graduer les axes de 5 en 5 pour permettre une lecture plus facile des solutions.

Le graphique a. ci-dessous montre que ce distributeur peut fournir six types de livraisons : 10 remorques à trois roues et 80 remorques à quatre roues, 30 remorques à trois roues et 65 remorques à quatre roues, 50 remorques à trois roues et 50 remorques à quatre roues, 70 remorques à trois roues et 35 remorques à quatre roues, 90 remorques à trois roues et 20 remorques à quatre roues, 110 remorques à trois roues et 5 remorques à quatre roues.



a.


b.

a. Le graphique b montre les deux droites d'équations respectives $3x + 4y = 350$ *en rouge* et $3x + 4y = 300$ *en bleu* . Si le nombre de roues reçues est entre 300 et 350, les couples cherchés (x, y) doivent vérifier $300 \leq 3x + 4y \leq 350$. Ces couples sont les coordonnées des points situés dans la bande déterminée par ces deux droites, les possibilités sont représentées par les croix sur le graphique b. On voit ici que le nombre de solutions devient plus important, il le serait encore davantage si la condition était par exemple $200 \leq 3x + 4y \leq 350$. C'est alors que la résolution graphique trouve un intérêt. On se contente alors de représenter graphiquement l'ensemble des solutions par le lieu de points.

REMARQUE : Il est important de bien prendre en considération toutes les contraintes de l'énoncé, en particulier l'ensemble dans lequel se situent les solutions. Selon le domaine numérique, la résolution graphique est une méthode plus accessible que la résolution algébrique pour les mettre en évidence.

Exemple 2[2]

Trois forfaits de téléphone sont proposés par un distributeur de téléphonie mobile. Mr. B. hésite, vous allez l'aider à choisir…

Forfait A : Compte bloqué à 20€ par mois pour 1heure de communication maximum. Au-delà aucune communication n'est possible.

Forfait B : Forfait à 17€ mensuel donnant droit à 45 minutes de communication, chaque minute supplémentaire étant facturée 0,50€.

Forfait C : Abonnement de 10€ mensuel, chaque minute consommée étant facturée 0,25€.

1. Soit x la durée de communication mensuelle, exprimée en minutes. Exprimer le montant à payer pour chaque forfait en fonction de x.
2. Représenter sur un même graphique les trois fonctions représentant les trois tarifs.
3. Déterminer graphiquement quel forfait permettra à Mr. B. de téléphoner le plus longtemps pour 30€.
4. Quel conseil donnez-vous à Mr. B. selon la durée mensuelle de communication qu'il désire ?

[2] D'après *Math' x* seconde ed.2010

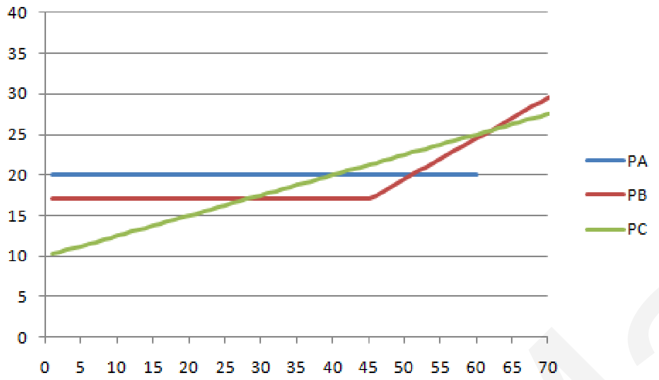
1. Les différents forfaits s'expriment ainsi :

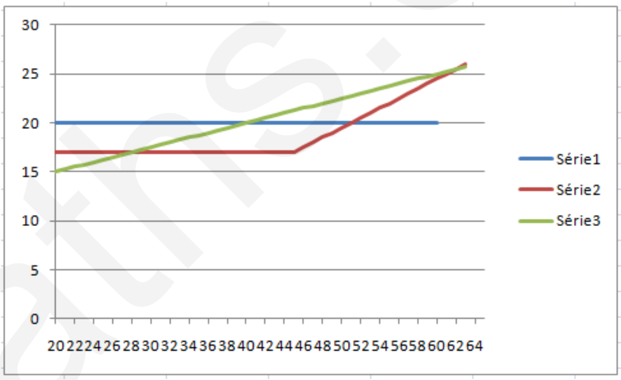
Avec le forfait A, le prix à payer est : $P_A(x) = 20 \text{ pour } 0 \le x \le 60$

Avec le forfait B, le prix à payer est : $P_B(x) = \begin{cases} 17 \text{ pour } 0 \le x \le 45 \\ 17 + 0,50x \text{ pour } x > 45 \end{cases}$

Avec le forfait C, le prix à payer est : $P_C(x) = 10 + 0,25x \text{ pour } x \in \mathbb{N}$

2. Ces trois fonctions font partie de la famille des fonctions affines. $P_A(x)$ est constant sur l'intervalle où cette fonction est définie. $P_B(x)$ est affine par morceaux, c'est-à-dire qu'elle est affine sur chaque intervalle, $P_C(x)$ est affine pour tout x. Le graphique ci-dessous représente ces trois fonctions : en bleu le tarif A, en rouge le tarif B, en vert le tarif C. Il a été réalisé avec le tableur, mais on peut tracer ces droites en choisissant des points, tout en respectant bien les intervalles de définition.





3. La lecture graphique permet de voir qu'entre 25€ et 30€, les tarifs B et C sont proches, mais un changement d'échelle montre que pour 30€, le tarif B devient inférieur, le tarif A est supérieur aux deux autres. Mr. B. choisira donc le tarif B.

4. Le tarif le plus bas correspond aux points dont l'ordonnée est inférieure aux autres. On peut donc conseiller à Mr. B. de choisir

- le tarif C (vert) entre 0 et 28 minutes
- le tarif B (rouge) entre 28 et 51 minutes
- le tarif A entre 51 et 60 minutes
- le tarif C au-delà de 60 minutes.

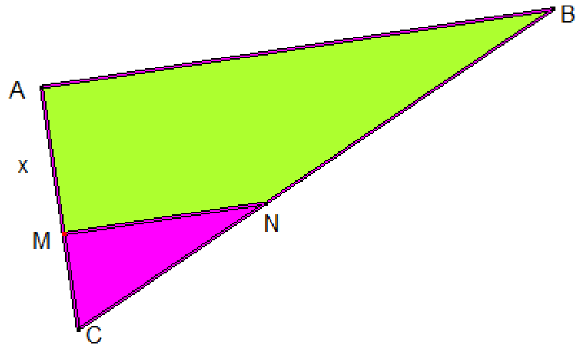
REMARQUE : La résolution algébrique devient plus coûteuse quand le nombre d'équations ou d'inéquations augmente…Cependant le choix d'une échelle judicieuse est indispensable pour pouvoir être efficace dans la lecture graphique. La conjugaison des deux méthodes peut permettre d'avoir une vision globale de la position respective des droites, le calcul finalisera les valeurs particulières qui peuvent être difficiles à lire si l'échelle est mal adaptée.

Problème relevant d'une résolution d'équation du second degré[3]

ABC est un triangle rectangle en A avec $AB = 6cm$ et $AC = 4cm$. Pour tout point M de [AC], on place un point N sur [BC] tel que (MN) et (AB) soient parallèles. Le graphique ci-dessous représente la variation des aires du triangle CMN et du trapèze AMNB en fonction de *x*.

1. Interpréter ce graphique et en déduire la valeur de *x* pour laquelle ces deux aires sont égales. Donner alors la valeur ces deux aires.

2. Vérifier par le calcul que la valeur de *x* solution est $4-2\sqrt{2}$. Calculer la valeur des deux aires.



1. L'aire du triangle CMN est égale à l'aire du triangle CAB quand M est en A, c'est-à-dire égale à $\frac{4\times 6}{2} cm^2$, soit $12 cm^2$. Elle est égale à 0 quand le point M est en C, c'est-à-dire quand $x = 4$. La courbe rose représente donc cette aire.

L'aire du trapèze AMNB est égale à l'aire du triangle ACB quand M est en C, c'est-à-dire quand $x = 4$. Elle est égale à 0 quand M est en A, soit quand $x = 0$. La courbe verte représente donc cette aire.

L'abscisse du point d'intersection des deux courbes représente la valeur de *x* pour laquelle les deux aires sont égales. La lecture graphique et l'échelle choisie permettent de donner l'encadrement $1{,}125 cm < x < 1{,}25 cm$.

L'ordonnée du point d'intersection nous donne la valeur des deux aires, soit $6 cm^2$.

2. $AM = x$ donc $CM = 4 - x$ avec $0 \le x \le 4$.

Les droites (MN) et (AB) sont parallèles et M appartient à [AC], donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{CM}{CA} = \frac{MN}{AB}$, soit $\frac{4-x}{4} = \frac{MN}{6}$. On en déduit que $MN = \frac{6(4-x)}{4} = 6 - 1{,}5x$. L'aire du triangle CMN est égale à $\frac{CM \times MN}{2} = \frac{(4-x)(6-1{,}5x)}{2} = 12 - 6x + 0{,}75x^2$. L'aire du trapèze AMNB est égale

[3] D'après *Math' x* seconde ed.2010

à $\dfrac{(MN+AB)\times AM}{2}=\dfrac{(6-1,5x+6)\times x}{2}=6x-0,75x^2$. La valeur de x pour laquelle ces deux aires sont égales vérifie l'équation $12-6x+0,75x^2=6x-0,75x^2$, soit $1,5x^2-12x+12=0$.

Si la résolution des équations du second degré n'est pas accessible[4], on peut cependant vérifier la validité de la solution proposée $4-2\sqrt{2}$. D'une part $0\leq 4-2\sqrt{2}\leq 4$. D'autre part, le premier membre s'écrit :

$$1,5\times(4-2\sqrt{2})^2-12(4-2\sqrt{2})+12=1,5(16+8-16\sqrt{2})-48+24\sqrt{2}+12=36-24\sqrt{2}-36+24\sqrt{2}=0$$

La valeur proposée vérifie bien l'équation ; c'est donc la valeur exacte de x pour laquelle que les deux aires sont égales. Une valeur approchée au centième de $4-2\sqrt{2}$ est 1,17 ; elle vérifie bien l'encadrement trouvé graphiquement $1,125cm<4-2\sqrt{2}cm<1,25cm$. Les deux aires sont alors égales à :

$$6x-0,75x^2=6\times(4-2\sqrt{2})-0,75\times(4-2\sqrt{2})^2=24-12\sqrt{2}-0,75\times(24-16\sqrt{2})=24-12\sqrt{2}-18+12\sqrt{2}=6cm^2$$

Remarque : On constate que la lecture graphique présente une certaine imprécision. La seule façon d'obtenir la certitude des résultats reste la vérification par le calcul, quand elle est possible.

[4] Hors programme CRPE